DAS ABELSCHE THEOREM
FÜR GRUNDKURVEN, DIE IN GERADE UND KEGELSCHNITTE ZERFALLEN

VON

DR. PHIL. **RUDOLF ZAHLER**
AUS TÜRKHEIM (BAYERN).

INAUGURAL-DISSERTATION

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT, SEKTION II,

DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN.

(ZUR ZENSUR EINGEREICHT AM 1. JUNI 1902.)

MIT EINER TAFEL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1902.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552325_0087

Herrn Universitätsprofessor Dr. F. LINDEMANN, der die Güte hatte, mir das Thema zu meiner Dissertation zu stellen, fühle ich mich zu lebhaftem Danke verpflichtet für mannigfaltigen, wohlwollenden Rat bei Bearbeitung des Themas.

Dr. phil. R. ZAHLER.

Das Abelsche Theorem für Grundkurven, die in Gerade und Kegelschnitte zerfallen.

Einleitung.

Ax. Harnack hat in seiner Abhandlung über algebraische Differentiale (Math. Annal. B. IX.) einen Beweis des Abelschen Theoremes geliefert, der, wie er selbst betont, den Vorzug hat, ausschließlich mit den Begriffen der algebraischen Formen geleistet zu werden, und jedwede Singularität, sogar das Zerfallen der Grundkurve zuzulassen. Auf seine Entwickelungen mich stützend, will ich im Folgenden die Relationen des Abelschen Theoremes in expliziter Form, die direkt eine geometrische Deutung gibt, darstellen für ein System von

I. a) n Geraden, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen,
   b) n Geraden, die alle durch einen Punkt gehen, also einem Büschel angehören;
II. n Kegelschnitten, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen;
III. einem Kegelschnitt und einer Geraden, einem Kegelschnitt und zwei Geraden.

Der Fall I a) deckt sich offenbar mit dem Carnotschen Theorem. Letzteres mit besonderer Berücksichtigung der nichteuklidischen Geometrie an dem Abelschen Theorem absolut zu diskutieren mit Hinzunahme des Spezialfalles I b) und durch Behandlung der Fälle II und III zu verallgemeinern, ist das Ziel der nachfolgenden Entwickelungen.

Erster Abschnitt.

Entwickelung der Theoreme.

I. a)

n Gerade, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen (Carnotsches Theorem).

Die Grundkurve ist:

$$a_x^n \equiv g_x^{(1)} \cdot g_x^{(2)} \cdots g_x^{(n)} \equiv \prod_1^n{}_\nu \, g_x^{(\nu)} = 0.$$

Vorausgesetzt ist, daß sich keine drei oder mehr dieser n Geraden in einem Punkte schneiden.

Für ein Schnittpunktsystem mit einer algebraischen Kurve m^{ter} Ordnung $\varphi_x^m = 0$ gilt nun nach dem Abelschen Satze:

$$\sum_1^{m \cdot n}{}_\pi \left(\frac{\alpha_x^{n-3}(c\,x\,dx)}{a_x^{n-1} a_c} \right)_\pi = 0$$

$$[a^n_{x(\pi)} = 0, \quad \varphi^m_{x(\pi)} = 0]$$

(Die Differentiale sind hingeleitet längs $a_x^n = 0$ von $\varphi_x^m = 0$ bis zur Nachbarkurve $(\varphi + \delta\varphi)_x^m = 0$.)

Für die Funktion $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung α_x^{n-3} der drei homogenen Variabelen x_1, x_2 und x_3 sei vorderhand keine Voraussetzung gemacht. Der Index π zeige an, daß in dem damit behafteten Ausdrucke die Variabelen x_i durch die Koordinaten eines Schnittpunktes von $a_x^n = 0$ mit $\varphi_x^m = 0$ ersetzt werden mögen.

Es liegen nun die $m \cdot n$ Schnittpunkte bezw. zu je m auf den n Geraden $g_x^{(\nu)} = 0$ und man kann deshalb die obige Summe von Differentialien auch folgendermaßen als Doppelsumme schreiben:

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{\alpha_x^{n-3}(c\,x\,dx)}{a_x^{n-1} a_c} \right)_{\mu,\nu} = 0.$$

(Hier bedeute der Index μ, ν, daß in dem eingeklammerten Ausdruck die Koordinaten des μ^{ten} Schnittpunktes auf der ν^{ten} Geraden mit $\varphi_x^m = 0$ einzusetzen sind.)

Nun ist leicht ersichtlich, daß:

$$(a_x^{n-1} a_c)_{\mu,\nu} = g_c^{(\nu)} \cdot (\Pi_x^{(\nu)})_{\mu,\nu},$$

wobei $\Pi_x^{(\nu)}$ das Produkt der n Geraden mit Ausschluß der ν^{ten} bedeutet.

Die Doppelsumme erhält also die Form:

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{\alpha_x^{n-3}(c\,x\,d\,x)}{g_c^{(\nu)} \Pi_x^{(\nu)}} \right)_{\mu,\nu} = 0.$$

Bei Festhaltung von ν kann man statt $a_x^n = 0$ als Grundkurve $g_x^{(\nu)} = 0$ betrachten, und es ist der Wert zu ermitteln, den

$$\left(\frac{\alpha_x^{\nu-3}(c\,x\,d\,x)}{g_c^{(\nu)} \cdot \Pi_x^{(\nu)}} \right)_{\mu,\nu}$$

hat, unter der Voraussetzung, daß das Differential längs $g_x^{(\nu)} = 0$ hingeführt wird.

An Stelle des allgemeinen α_x^{n-3} kann man eine lineare Kombination von $p_1 = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ speziellen Funktionen Ω_x^{n-3} treten lassen. Diese bestimme ich folgendermaßen: Die n Geraden $g_x^{(\nu)} = 0$ schneiden sich gegenseitig in $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Punkten, wobei für parallele Geraden der unendlich ferne Punkt einzurechnen ist. Auf dem n-Seit, das die n Geraden bilden, kann man auf mannigfaltige Art ein n-Eck derart ausschneiden, daß auf jeder der n Geraden zwei und nur zwei Ecken liegen. Durch die übrig bleibenden $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ Schnittpunkte der $g_x^{(\nu)} = 0$ unter sich lasse man $\Omega_x^{n-3} = 0$ gehen. Ω_x^{n-3} ist dadurch bis auf eine unwesentliche Konstante vollständig bestimmt, wie die Abzählung der Koeffizienten einer algebraischen Funktion vom $(n-3)^{\text{ten}}$ Grade in den homogenen Variabelen x_1, x_2 und x_3 zeigt. Das erwähnte n-Eck kann man auf wenigstens $p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ verschiedene Arten so wählen, daß die jedesmal übrigbleibenden Punktgruppen nicht alle ein und denselben Punkt enthalten. α_x^{n-3} muß sich demnach stets als eine lineare additive Kombination von $p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ solchen n-Ecken entsprechenden Ω_x^{n-3} darstellen lassen. Ohne die Allgemeinheit der Entwickelung aufzugeben, kann man also statt des früheren Ausdruckes folgenden betrachten:

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{\Omega_x^{n-3}(c\,x\,d\,x)}{g_c^{(\nu)} \Pi_x^{(\nu)}} \right)_{\mu,\nu} = 0$$

$$[g_x^{(\nu)} = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n;]$$

$\frac{\Omega_x^{n-3}(c\,x\,d\,x)}{g_c^{(\nu)} \Pi_x^{(\nu)}}$ läßt sich unter der Bedingung $g_x^{(\nu)} = 0$ als ein vollständiges logarithmisches Differential darstellen.

Es möge der von 1 bis n variierende Index ν bei $g_x^{(\nu)} = 0$ die Geraden so ordnen, wie sie als Seiten eines gemäß den obigen Be-

stimmungen ausgeschnittenen n-Eckes aufeinander folgen. Die n aufeinanderfolgenden Ecken bezeichne ich dann mit: $\xi_i^{(1,2)}$, $\xi_i^{(2,3)}$, $\dots$, $\xi_i^{(n,1)}$ $(i = 1, 2, 3)$, wobei $\xi_i^{(\nu,\nu+1)}$ die Koordinaten der Ecke bedeuten, in welcher $g_x^{(\nu)} = 0$ und $g_x^{(\nu+1)} = 0$ zusammenstoßen.

Die Bedingung $g_x^{(\nu)} = 0$ kann man ersetzen durch Einführung von zwei homogenen variablen Parametern $\varkappa_1^{(\nu)}$ und $\varkappa_2^{(\nu)}$, indem die Koordinaten irgend eines Punktes von $g_x^{(\nu)} = 0$ sich darstellen lassen durch:

$$\varrho x_i^{(\nu)} = \varkappa_1^{(\nu)} \xi_i^{(\nu-1,\nu)} + \varkappa_2^{(\nu)} \xi_i^{(\nu,\nu+1)} \qquad (i = 1, 2, 3.)$$

Es ist dann auch:

$$d\varrho x_i^{(\nu)} + \varrho dx_i^{(\nu)} = d\varkappa_1^{(\nu)} \xi_i^{(\nu-1,\nu)} + d\varkappa_2^{(\nu)} \xi_i^{(\nu,\nu+1)}$$

$(cx\,dx)$ geht also über in:

$$\frac{1}{\varrho^2} \varkappa_1^{(\nu)} d\varkappa_2^{(\nu)} \cdot \left(c\xi^{(\nu-1,\nu)}\xi^{(\nu,\nu+1)}\right) + \frac{1}{\varrho^2} \varkappa_2^{(\nu)} d\varkappa_1^{(\nu)} \left(c\xi^{(\nu,\nu+1)}\xi^{(\nu-1,\nu)}\right)$$

$$= \frac{1}{\varrho^2} \left(c\xi^{(\nu-1,\nu)}\xi^{(\nu,\nu+1)}\right) \left(\varkappa^{(\nu)} d\varkappa^{(\nu)}\right).$$

Aus $\dfrac{\Omega_x^{n-3}}{\Pi_x^{(\nu)}}$ wird durch Einführung der obigen Parameterdarstellung:

$$\frac{\varrho^2 C_\nu}{\varkappa_1^{(\nu)} \varkappa_2^{(\nu)}}.$$

Denn $\Omega_x^{n-3} = 0$ geht durch dieselben $(n-3)$ Punkte von $g_x^{(\nu)} = 0$, durch welche $\Pi_x^{(\nu)} = 0$ geht, mit Ausnahme der beiden Grundpunkte $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ und $\xi^{(\nu,\nu+1)}$, welchen die beiden Parameterwerte $\varkappa_2^{(\nu)} = 0$ und $\varkappa_1^{(\nu)} = 0$ bezüglich entsprechen. Der Wert der Konstanten C_ν läßt sich vor allem durch folgende zwei Ausdrücke darstellen:

$$C_\nu = \frac{\Omega^{n-3}_{\xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\xi_1^{(\nu,\nu+1)} \dfrac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \xi_1^{(\nu-1,\nu)}} + \xi_2^{(\nu,\nu+1)} \dfrac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \xi_2^{(\nu-1,\nu)}} + \xi_3^{(\nu,\nu+1)} \dfrac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \xi_3^{(\nu-1,\nu)}}}$$

$$= \frac{\Omega^{n-3}_{\xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\Pi^{(\nu-1,\nu)}_{\xi^{(\nu-1,\nu)}} \cdot g^{(\nu-1)}_{\xi^{(\nu,\nu+1)}}};$$

$$C_\nu = \frac{\Omega^{n-3}_{\xi^{(\nu,\nu+1)}}}{\xi_1^{(\nu-1,\nu)} \dfrac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \xi_1^{(\nu,\nu+1)}} + \xi_2^{(\nu-1,\nu)} \dfrac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \xi_2^{(\nu,\nu+1)}} + \xi_3^{(\nu-1,\nu)} \dfrac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \xi_3^{(\nu,\nu+1)}}}$$

$$= \frac{\Omega^{n-3}_{\xi^{(\nu,\nu+1)}}}{\Pi^{(\nu,\nu+1)}_{\xi^{(\nu,\nu+1)}} \cdot g^{(\nu+1)}_{\xi^{(\nu-1,\nu)}}};$$

($\Pi_x^{(\nu,\nu+1)}$ bedeute das Produkt der n Geraden mit Ausschluß der ν^{ten} und $(\nu+1)^{\text{ten}}$; analog $\Pi_x^{(\nu-1,\nu)}$.)

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{\Omega_x^{n-3}(c\,x\,d\,x)}{g_c^{(\nu)} \cdot \Pi_x^{(\nu)}} \right)_{\mu,\nu} = 0 \qquad \begin{cases} g_x^{(\nu)} = 0 \\ \nu = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

kann man also ersetzen durch:

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \frac{C_\nu \cdot \left(c\,\xi^{(\nu-1,\,\nu)}\,\xi^{(\nu,\,\nu+1)}\right)}{g_c^{(\nu)}} \cdot \left(\frac{(\varkappa\,d\,\varkappa)}{\varkappa_1\,\varkappa_2} \right)_{\mu,\nu} = 0 .$$

Setzt man für $\dfrac{C_\nu \cdot \left(c\,\xi^{(\nu-1,\,\nu)}\,\xi^{(\nu,\,\nu+1)}\right)}{g_c^{(\nu)}} = C_\nu'$, so läßt sich beweisen, daß $C_\nu' = C_{\nu+1}' = C_{\nu+2}'$ u. s. w., so daß die C_ν' in obiger Gleichung durch den Faktor 1 ersetzt werden können.

Nimmt man die zweite für den Wert von C_ν aufgestellte Form, so hat man:

$$C_\nu' = \frac{\Omega_{\xi^{(\nu,\,\nu+1)}}^{n-3} \cdot \left(c\,\xi^{(\nu-1,\,\nu)}\,\xi^{(\nu,\,\nu+1)}\right)}{\Pi_{\xi^{(\nu,\,\nu+1)}}^{(\nu,\,\nu+1)} \cdot g_c^{(\nu)} \cdot g_{\xi^{(\nu-1,\,\nu)}}^{(\nu+1)}} .$$

Nimmt man die erste für den Wert von $C_{\nu+1}$ aus der von C_ν durch Vertauschung von ν mit $(\nu+1)$ hervorgehenden Form, so hat man:

$$C_{\nu+1}' = \frac{\Omega_{\xi^{(\nu,\,\nu+1)}}^{n-3} \cdot \left(c\,\xi^{(\nu,\,\nu+1)}\,\xi^{(\nu+1,\,\nu+2)}\right)}{\Pi_{\xi^{(\nu,\,\nu+1)}}^{(\nu,\,\nu+1)} \cdot g_{\xi^{(\nu+1,\,\nu+2)}}^{(\nu)} \cdot g_c^{(\nu+1)}} .$$

Nun ist C_ν' sowohl wie $C_{\nu+1}'$ gänzlich unabhängig von der Wahl der jedesmaligen c_i, da ja schon $\dfrac{\left(c\,\xi^{(\nu-1,\,\nu)}\,\xi^{(\nu,\,\nu+1)}\right)}{g_c^{(\nu)}}$ und $\dfrac{\left(c\,\xi^{(\nu,\,\nu+1)}\,\xi^{(\nu+1,\,\nu+2)}\right)}{g_c^{(\nu+1)}}$ vollständig unabhängig davon sind. Setzt man nun in C_ν' für c_i, $\xi_i^{(\nu+1,\,\nu+2)}$ und in $C_{\nu+1}'$ für c_i, $\xi_i^{(\nu-1,\,\nu)}$, so wird augenscheinlich C_ν' identisch mit $C_{\nu+1}'$. Wegen der Willkürlichkeit der Wahl von c_i gilt also für jede beliebige Wahl desselben, daß $C_\nu' = C_{\nu+1}'$. Analog ist $C_{\nu+1}' = C_{\nu+2}'$ u. s. w.

Man hat nun also:

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{(\varkappa\,d\,\varkappa)}{\varkappa_1\,\varkappa_2} \right)_{\mu,\nu} = 0$$

oder

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu d \log \frac{\varkappa_2^{(\mu,\,\nu)}}{\varkappa_1^{(\mu,\,\nu)}} = 0 .$$

Integriert man nun von einem Schnittpunktsystem von $a_x^n = 0$ und $\psi_x^m = 0$ bis zu dem von $a_x^n = 0$ und $\varphi_x^m = 0$, so erhält man:

$$\int_\psi^\varphi \sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu d \log \frac{\varkappa_2^{(\mu,\,\nu)}}{\varkappa_1^{(\mu,\,\nu)}} = \left[\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \log \frac{\varkappa_2^{(\mu,\,\nu)}}{\varkappa_1^{(\mu,\,\nu)}} \right]_\psi^\varphi = \text{constans.}$$

Diese Konstante kann jedoch nur ein Multiplum der Periode der zum Logarithmus inversen Exponentialfunktion, also von der Form $2h\pi i$ sein, wo h irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Denn variiert man die Kurve ψ statt nach einer von ihr verschiedenen in sich selbst zurück, so daß also φ mit ψ identisch wird, so treten auf der linken Seite Differenzen von Logarithmen mit bezw. gleichen Argumenten auf, welche den Wert Null oder ein ganzes Multiplum von $2\pi i$ liefern. Also:

$$\left[\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \log \frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right]_\psi^\varphi = 2h\pi i \qquad (h=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

An Stelle von $\psi_x^m = 0$ kann man eine m-fach zählende Gerade einführen, am einfachsten wohl eine von den drei Geraden $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Nimmt man $x_3 = 0$, so erhält man:

$$\left(\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \log \frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\varphi - m \log \prod_1^n{}_\nu \left(-\frac{\xi_3^{(\nu-1,\nu)}}{\xi_3^{(\nu,\nu+1)}}\right) = 2h\pi i.$$

Gemäß der Parameterdarstellung pag. 8 wird nämlich für $x_3 = 0$ $\frac{x_2^{(\nu)}}{x_1^{(\nu)}} = -\frac{\xi_3^{(\nu-1,\nu)}}{\xi_3^{(\nu,\nu+1)}}$. $\prod_1^n{}_\nu \left(-\frac{\xi_3^{(\nu-1,\nu)}}{\xi_3^{(\nu,\nu+1)}}\right)$ wird gleich $(-1)^n$, da im Nenner und Zähler gleiche Terme auftreten. Man hat also:

$$\log\left(\prod_1^n{}_\nu \prod_1^m{}_\mu \frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\varphi = \log(-1)^{m\cdot n} + 2h\pi i;$$

durch Übergang zur inversen Funktion:

$$\underline{\left(\prod_1^n{}_\nu \prod_1^m{}_\mu \frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\varphi = (-1)^{m\cdot n}.}$$

Die Verhältnisse $\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}$ sind durch die Gleichungen der Parameterdarstellung pag. 8 bestimmt, wenn die Bedeutung der Koordinaten x_1, x_2 und x_3 festgelegt ist. Für die Euklidsche oder „spezielle“ Maßbestimmung stellt $\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}$ das direkte Abstandsverhältnis des μ^{ten} Schnittpunktes der ν^{ten} Geraden mit $\varphi_x^m = 0$ dar, bezogen auf die Schnittpunkte der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ bezw. $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Geraden mit der ν^{ten}. Nimmt man für φ die unendlich ferne Gerade der Euklidschen Geometrie, so findet die obige Formel eine Bestätigung, da für einen unendlich fernen Punkt auf jeder der n Geraden das Verhältnis $\frac{x_2}{x_1}$ den Wert (-1) hat.

Es erscheint wünschenswert, für die „absolute“ oder „Nicht-euklidsche“ Maßgeometrie die Formel brauchbarer zu gestalten, umsomehr als dann eine direkte duale Übertragung auf Liniengebilde möglich wird.

$\frac{x_2}{x_1}$ werde mit λ bezeichnet. Zum Punkte $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ gehört der Wert $\lambda = 0$, zu $\xi^{(\nu,\nu+1)}$ der Wert $\lambda = \infty$; durch die ν^{te} Gerade werden auf dem Fundamentalkegelschnitt zwei Punkte ausgeschnitten mit den Werten $\lambda = A_1^{(\nu)}$ und $\lambda = A_2^{(\nu)}$; ein beliebiger Punkt auf der ν^{ten} Geraden habe den Wert $\lambda = \lambda^{(\mu,\nu)}$, und werde mit $x^{(\mu,\nu)}$ bezeichnet. Die Konstante k der absoluten Maßbestimmung werde nach Cayley gleich $-\frac{i}{2}$ gesetzt, $i = \sqrt{-1}$, eine Spezialisierung, welche das Schlußresultat etwas einfacher gestaltet und mit der gewöhnlichen Maßbestimmung im Büschel übereinkommt. Der Abstand zweier Punkte x und y erhalte das Symbol xy. Dann ist nach Clebsch-Lindemann, Geometrie, 2. Bd., S. 465:

$$d_1 = \overline{x^{(\mu,\nu)}\,\xi^{(\nu-1,\nu)}} = -\frac{i}{2}\log\frac{0-A_1^{(\nu)}}{0-A_2^{(\nu)}}\cdot\frac{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_2^{(\nu)}}{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_1^{(\nu)}}$$

$$= -\frac{i}{2}\log\frac{A_1^{(\nu)}}{A_2^{(\nu)}}\cdot\frac{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_2^{(\nu)}}{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_1^{(\nu)}};$$

$$d_2 = \overline{x^{(\mu,\nu)}\,\xi^{(\nu,\nu+1)}} = -\frac{i}{2}\log\frac{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_2^{(\nu)}}{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_1^{(\nu)}};\quad \text{daher:}$$

$$\frac{\sin d_1}{\sin d_2} = \frac{e^{id_1}-e^{-id_1}}{e^{id_2}-e^{-id_2}} = \frac{\left(\frac{A_1^{(\nu)}}{A_2^{(\nu)}}\cdot\frac{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_2^{(\nu)}}{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_1^{(\nu)}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{A_1^{(\nu)}}{A_2^{(\nu)}}\cdot\frac{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_2^{(\nu)}}{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_1^{(\nu)}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_2^{(\nu)}}{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_1^{(\nu)}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_2^{(\nu)}}{\lambda^{(\mu,\nu)}-A_1^{(\nu)}}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Die Wurzeln sind hier entweder alle positiv oder negativ zu nehmen, was sich gleich bleibt. Man erhält durch eine kleine Rechnung:

$$\frac{\sin d_1}{\sin d_2} = \frac{1}{\left(\pm\sqrt{A_1^{(\nu)}}\right)\left(\pm\sqrt{A_2^{(\nu)}}\right)}\cdot\lambda^{(\mu,\nu)}.$$

Die Wurzeln sind hier wieder beide entweder positiv oder negativ zu nehmen, so daß der Nenner stets den Wert $\left(+\sqrt{A_1^{(\nu)}\cdot A_2^{(\nu)}}\right)$ hat. Es ist also:

$$\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}} = \lambda^{(\mu,\nu)} = +\sqrt{A_1^{(\nu)}\cdot A_2^{(\nu)}}\cdot\frac{\sin d_1}{\sin d_2} = +\sqrt{A_1^{(\nu)}\cdot A_2^{(\nu)}}\cdot\frac{\sin\overline{x^{(\mu,\nu)}\,\xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\sin\overline{x^{(\mu,\nu)}\,\xi^{(\nu,\nu+1)}}}$$

$$\left(\prod_1^n{}_\nu\prod_1^m{}_\mu\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\varphi = \prod_1^n{}_\nu\prod_1^m{}_\mu\frac{\sin\overline{x^{(\mu,\nu)}\,\xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\sin\overline{x^{(\mu,\nu)}\,\xi^{(\nu,\nu+1)}}}\cdot\prod_1^n{}_\nu\left(+\sqrt{A_1^{(\nu)}\cdot A_2^{(\nu)}}\right)$$

$$= (-1)^{m\cdot n}.$$

Es ist aber:

$$\prod_{1}^{n}{}_{\nu} A_1^{(\nu)} \cdot A_2^{(\nu)} = (-1)^{2 \cdot n} = +1,$$

da die A die Parameter der Schnittpunkte der n Geraden mit einem Kegelschnitt, dem Fundamentalkegelschnitt der absoluten Maßbestimmung, sind. Die positive Wurzel des Produktes ist nun gleich $+1$, so daß man hat:

$$\left(\prod_{1}^{n}{}_{\nu} \prod_{1}^{m}{}_{\mu} \frac{\sin \overline{x^{(\mu,\nu)} \xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\sin \overline{x^{(\mu,\nu)} \xi^{(\nu,\nu+1)}}} \right)_{\varphi} = (-1)^{m \cdot n}.$$

(Hätte man die Konstante der absoluten Maßbestimmung nicht spezialisiert, so würden für die Terme: $\overline{x^{(\mu,\nu)} \xi^{(\nu,\nu+1)}}$ und $\overline{x^{(\mu,\nu)} \xi^{(\nu-1,\nu)}}$ dieselben, mit einem Faktor: $\frac{i}{2k}$ versehen, auftreten.)

Auf elementare Weise hat Carnot die Relation S. 10 für die Euklidsche Geometrie in seiner „géometrie de position“ S. 437 entwickelt. (Deutsche Bearbeitung 2. Bd., S. 200; schon S. 39 und 40 stellt Carnot für den Fall $n = 3$ die Relation für eine beliebige $\varphi_x''' = 0$ auf, indem er die Kurve als ein Vieleck von unendlicher Seitenzahl betrachtet, was bei Untersuchung von Schnittpunktsystemen wohl nicht korrekt sein dürfte.) Auch aus dem Abelschen Theoreme findet sich der Carnotsche Satz für den einfachsten Fall $n = 3$ schon von Lindemann in dessen Bearbeitung der Vorlesungen von Clebsch (S. 829) abgeleitet; doch ist hier das Verfahren für den allgemeinen Fall verdeckt, da die Bestimmung von Ω_x^{n-3} als vom nullten Grade illusorisch ist.

Ich will nun das Carnotsche Theorem, alle bereits erhaltenen Resultate zusammenfassend, folgendermaßen formulieren:

Sind n Gerade gegeben ($n > 3$), von denen sich nicht mehr als zwei in ein und demselben Punkte treffen, so kann man aus dem von diesen n Geraden gebildeten n-Seit wenigstens (für $n > 4$ mehr als) $p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ solche n-Ecke bilden, daß jedes einzelne zwei und nur zwei Ecken mit je einer Geraden gemeinsam hat, während die jedesmal übrig bleibenden Punktgruppen nicht alle ein und denselben Punkt enthalten. Bringt man ein solches n-Eck zum Schnitt mit einer beliebigen algebraischen Kurve $\varphi_x''' = 0$, so schneidet diese eine jede Seite des n-Ecks innerhalb oder auf ihrer Verlängerung in m Punkten, deren Sinusverhältnisse der Entfernungen in Bezug auf die zwei Ecken man einzeln bilde. Vertritt ein Endpunkt auf einer Seite die Stelle des ersten Grundpunktes, so möge er auf der anstoßenden Seite die Rolle des zweiten übernehmen. Dann ist stets das Produkt aller dieser Produkte von Sinusverhältnissen auf den

einzelnen Geraden gleich $(-1)^{m \cdot n}$, wobei das Sinusverhältnis für einen Punkt innerhalb der beiden Grundpunkte positiv, außerhalb negativ in Rechnung gebracht werden muß und in der Definition der Entfernung zweier Punkte die Konstante k gleich $\left(-\frac{i}{2}\right)$ gewählt wird. Bei der speziellen Maßbestimmung der Euklidschen Geometrie ist das Sinusverhältnis der Abstände zu ersetzen durch das Abstandsverhältnis selbst.

In der Form, in welcher hiermit das Carnotsche Theorem für die „absolute Maßgeometrie“ gegeben ist, kann es direkt auf Liniengebilde übertragen werden, indem die projektivischen Begriffe durch die dual entsprechenden zu ersetzen sind (insbesondere geht dabei der Begriff der Entfernung in den des Winkels über). Die dadurch gewonnene Formel für die absolute Geometrie gilt ganz unverändert dann auch noch in der Euklidschen Geometrie, in der sich Winkel und Entfernung nicht dual entsprechen.

Für $m \geq (n-2)$ sind alle p_1 Relationen von einander unabhängig. Für $m < (n-2)$ sind von den p_1 Relationen nur mehr $\left[m \cdot n - \frac{m(m+3)}{2}\right]$ von einander unabhängig. Auch für $m > (n-2)$ lassen sich mehr als p_1 Relationen aufstellen, wenn zugleich $m > 4$, indem man mehr als p_1 n-Ecke beschriebener Art ausschneiden kann. Doch können nur p_1 Relationen als unabhängig von einander betrachtet werden, wie man aus der Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ der unabhängigen Koeffizienten der Funktion α_x^{n-3} erkennt, die bei der Ableitung der Relationen aus dem Abelschen Theorem auftrat.

Bekanntlich existiert nun bei nicht zerfallenden Grundkurven die Umkehrung des Abelschen Theorems. Versucht man auf elementare Weise auch in unserm Falle den Beweis der Zulässigkeit der Umkehrung, also den Beweis, daß im Falle des Bestehens von p_1 unabhängigen Carnotschen n-Eck-Relationen zwischen $m \cdot n$ Punkten, welche zu je m auf n Geraden liegen, diese auf einer Kurve m^{ter} Ordnung liegen müssen, so zeigt sich, daß diese Umkehrung nur dann zweifellos zulässig ist, wenn die p_1 unabhängigen Relationen nicht für n-Ecke, sondern für p_1 Dreiecke gegeben sind, welche aus den n Geraden geeignet zusammengestellt sind. Man kann die p_1 Dreiecke am einfachsten so wählen, daß alle eine und dieselbe der n Graden enthalten und daß von den übrigen $(n-1)$ Graden immer je zwei hinzugenommen werden; dies geht genau auf $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ verschiedene Arten. Aus den Relationen für diese Dreiecke lassen sich durch geschickte multiplikatorische Kombinationen sowohl die Relationen für die übrigen Dreiecke, wie auch für alle in den n Geraden enthaltenen n'-Ecke ableiten, wenn $n \geq n' \geq 4$. Nicht aber lassen sich

umgekehrt immer aus p_1 n-Eck-Relationen eindeutig die Dreiecksrelationen ableiten. Das einfachste Beispiel hierfür ist $n = 4$. Die Carnotsche Relation für ein n-Eck mit den Ecken $1, 2, 3 \cdots n$ und je m Punkten auf den n Geraden werde symbolisch bezeichnet mit $R^{(m)}_{1,2,3\cdots n}$. Dann ist für das Vierseit auf der Figurentabelle (Fig. 1):

$$R^{(m)}_{126} \cdot R^{(m)}_{234} = R^{(m)}_{1346};$$
$$R^{(m)}_{135} \cdot R^{(m)}_{216} = R^{(m)}_{2356};$$
$$R^{(m)}_{135} \cdot R^{(m)}_{324} = R^{(m)}_{1245}.$$

Ist also gegeben:

$$R^{(m)}_{126} = R^{(m)}_{234} = R^{(m)}_{135} = (-1)^{3 \cdot m},$$

so sind wohl die

$$R^{(m)}_{1346} = R^{(m)}_{2356} = R^{(m)}_{1245} = (-1)^{6 \cdot m} = +1;$$

nicht umgekehrt ist aber, wenn letzteres vorausgesetzt wird, das vorhergehende notwendig der Fall, da die obigen drei Gleichungen dann auch erfüllt werden für:

$$R^{(m)}_{126} = R^{(m)}_{234} = R^{(m)}_{135} = -(-1)^{3m} = (-1)^{3m+1}.$$

Dann gibt es aber auch keine $\varphi^m_x = 0$, welche durch die 4. m Punkte geht, wie im folgenden sich zeigen wird.

Es sei $n = 3$, ferner zwischen $3m$ Punkten die Relation $R^{(m)}_{123} = (-1)^{3m}$ gegeben. Durch $(3m - 1)$ der Punkte läßt sich stets eine $\varphi^m_x = 0$ legen; diese schneidet noch einen Punkt aus, so daß nach dem Carnotschen Satze $R^{(m)'}_{123} = (-1)^{3m}$ ist, wobei der Accent bezeichnen soll, daß in $R^{(m)}_{123}$ der $(3m)^{\text{te}}$ Punkt damit zu versehen ist. Man hat also:

$$R^{(m)}_{123} = R^{(m)'}_{123}$$

oder

$$\frac{x_2^{(m,3)}}{x_1^{(m,3)}} = \frac{x_2^{(m,3)'}}{x_1^{(m,3)'}}.$$

Dies aber sagt aus, daß $\varphi^m_x = 0$ auch noch durch den $(3m)^{\text{ten}}$ Punkt geht.

Es sei $n = 4$, ferner mögen zwischen $(4m)$ Punkten die drei Relationen bestehen:

$$R^{(m)}_{126} = (-1)^m, \quad R^{(m)}_{135} = (-1)^m, \quad R^{(m)}_{234} = (-1)^m.$$

Vermöge der ersten der drei Relationen läßt sich nach obigem durch die $3m$ Punkte auf den drei Geraden (12), (26), (61) eine $\varphi^m_x = 0$ legen. Für diese sind erst $(3m - 1)$ unabhängige Bedingungen gegeben, so daß man ihr noch wenigstens $(m - 2)$ Bedingungen auferlegen kann; diese seien, daß $\varphi^m_x = 0$ auch noch durch $(m - 2)$ Punkte auf der Geraden (345) gehen soll. Es bestehen dann für das Schnittsystem dieser $\varphi^m_x = 0$ mit den vier Geraden noch die beiden Carnotschen Relationen:

$$R_{135}^{(m)''} = (-1)^m \quad \text{und} \quad R_{234}^{(m)''} = (-1)^m.$$

Der doppelte Accent bedeute, daß in $R_{135}^{(m)}$ und $R_{234}^{(m)}$ die den beiden letzten Punkten entsprechenden Terme damit zu versehen sind. Mit Berücksichtigung obiger Gleichungen hat man also:

$$R_{135}^{(m)} = R_{135}^{(m)''}, \quad R_{234}^{(m)} = R_{234}^{(m)''}$$

oder

$$\left(\frac{\varkappa_2^{(m-1)}}{\varkappa_1^{(m-1)}} \cdot \frac{\varkappa_2^{(m)}}{\varkappa_1^{(m)}}\right)_{35} = \left(\frac{\varkappa_2^{(m-1)'} \cdot \varkappa_2^{(m)'}}{\varkappa_1^{(m-1)'} \cdot \varkappa_1^{(m)'}}\right)_{35}$$

und

$$\left(\frac{\varkappa_2^{(m-1)} \cdot \varkappa_2^{(m)}}{\varkappa_1^{(m-1)} \cdot \varkappa_1^{(m)}}\right)_{34} = \left(\frac{\varkappa_2^{(m-1)'} \cdot \varkappa_2^{(m)'}}{\varkappa_1^{(m-1)'} \cdot \varkappa_1^{(m)'}}\right)_{34}.$$

(Die den Klammern angehängten Zahlen sollen die Grundpunkte bezeichnen, in Bezug auf welche die Parameterverhältnisse zu nehmen sind.) Diese zwei Relationen können nun wieder nur dann bestehen, wenn:

$$\frac{\varkappa_2^{(m-1)}}{\varkappa_1^{(m-1)}} = \frac{\varkappa_2^{(m-1)'}}{\varkappa_1^{(m-1)'}} \quad \text{und} \quad \frac{\varkappa_2^{(m)}}{\varkappa_1^{(m)}} = \frac{\varkappa_2^{(m)'}}{\varkappa_1^{(m)'}},$$

d. h. wenn $\varphi_x^m = 0$ auch noch durch die letzten zwei Punkte der drei vorgegebenen Relationen geht.

Jetzt ließe sich ganz analog die Umkehrung des Carnotschen Theorems für $n = 5$ machen und so aufsteigend für beliebiges n.

Zusätze: Geht $\varphi_x^m = 0$ durch einen Eckpunkt eines Carnotschen n-Ecks, so wird in der dazu gehörigen Relation wenigstens ein $\varkappa_2$ und ein $\varkappa_1$ null. Während nun die verschwindenden $\varkappa_2$ im Zähler auftreten, erscheinen die verschwindenden $\varkappa_1$ im Nenner von:

$$\left(\prod_1^n \prod_1^m \frac{\varkappa_2^{(\mu,\nu)}}{\varkappa_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\varphi.$$

Der ganze in diesem Doppelprodukt auftretende Quotient verschwindender Größen hat stets einen endlichen und bestimmten Wert. Dies folgt aus einer Bemerkung Harnacks (Math. Ann., Bd. 9, S. 381), nach welcher die Differentialsumme $\sum_{(a_x^n=0)(b_x^{n'}=0)} D$ nicht unendlich wird, wenn von den Schnittpunkten von $b_x^{n'} = 0$ mit $a_x^n = 0$ zwei oder mehrere zusammenrücken, also wenn $b_x^{n'} = 0$ $a_x^n = 0$ berührt oder durch einen vielfachen Punkt von $a_x^n = 0$ geht. a_x^n ist bei dem Carnotschen Theorem das Produkt der n Geraden, $b_x^{n'}$ ist zu ersetzen durch φ_x^m. Geht also $\varphi_x^m = 0$ durch einen Eckpunkt eines Carnotschen n-Ecks, so ist immer noch $\sum_{\mu,\nu}^{m,n} d \log \frac{\varkappa_2^{(\mu,\nu)}}{\varkappa_1^{(\mu,\nu)}} = 0$ und somit auch durch Integration und Einführung der zum Logarithmus inversen Funktion das Carnotsche Doppelprodukt $(-1)^{m \cdot n}$.

Der Grenzwert des Quotienten verschwindender Größen läßt sich in zwei Fällen sehr einfach angeben, nämlich erstens dann, wenn $\varphi_x^n = 0$ einfach, ohne zu berühren, durch einen Eckpunkt des n-Eckes geht, und zweitens dann, wenn $\varphi_x^n = 0$ einmal durch einen Eckpunkt geht und dabei die eine der in demselben zusammenstoßenden Seiten berührt.

Im ersten Falle, in welchem ein $\varkappa_1^{(\nu-1)} = 0$ und ebenso ein $\varkappa_2^{(\nu)} = 0$ bezw. die Entfernung $\overline{x^{(\mu,\nu-1)}\xi^{(\nu-1,\nu)}} = 0$ und $\overline{x^{(\mu,\nu)}\xi^{(\nu-1,\nu)}} = 0$ ist, bestimme man im Eckpunkte $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ die Tangente an φ und erhält, wie man aus der Figurentabelle (Figur 2) ersieht:

$$\lim \frac{\sin \overline{x^{(\nu)}\xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\sin \overline{x^{(\nu-1)}\xi^{(\nu-1,\nu)}}} = \lim \frac{\sin \overline{x'^{(\nu)}\xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\sin \overline{x'^{(\nu-1)}\xi^{(\nu-1,\nu)}}} = \lim \frac{\overline{x'^{(\nu)}\xi^{(\nu-1,\nu)}}}{\overline{x'^{(\nu-1)}\xi^{(\nu-1,\nu)}}}$$
$$= \frac{\sin (g^{(\nu-1)}t)}{\sin (g^{(\nu)}t)}.$$

(Hiebei bedeutet $(g^{(\nu)}t)$ den Winkel, welchen die ν^{te} Gerade mit der Tangente bildet.) Diese Formel gilt sowohl für die absolute wie für die spezielle Maßbestimmung wie aus dem Sinussatze für beide Geometrien ersichtlich ist.

Ohne Einführung von Winkeln kann man für die Euklidsche Geometrie den Grenzwert auch erhalten als Verhältnis der Sehnen, welche ein beliebiger in $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ die φ berührender Kreis auf den Seiten $g^{(\nu-1)}$ und $g^{(\nu)}$ ausschneidet. Man hat nach Figur 3:

$$\lim \frac{\varkappa_2^{(\nu)}}{\varkappa_1^{(\nu-1)}} = \lim \frac{\varkappa_2'^{(\nu)}}{\varkappa_1'^{(\nu-1)}};$$

da nun:

$$\varkappa_2'^{(\nu)}(\varkappa_2'^{(\nu)} + s'^{(\nu)}) = \varkappa_1'^{(\nu-1)} \cdot (\varkappa_1'^{(\nu-1)} + s'^{(\nu-1)}),$$

so ist:

$$\lim \frac{\varkappa_2^{(\nu)}}{\varkappa_1^{(\nu-1)}} = \lim \frac{\varkappa_1'^{(\nu-1)} + s'^{(\nu-1)}}{\varkappa_2'^{(\nu)} + s'^{(\nu)}} = \frac{s'^{(\nu-1)}}{s'^{(\nu)}}.$$

Der zweite Fall, in welchem $g_x^{(\nu)} = 0$ in einem Eckpunkte berührt werden möge, also zwei der $\varkappa_2^{(\nu)}$ und ein $\varkappa_1^{(\nu-1)}$ verschwinden, erledigt sich für die Euklidsche Geometrie durch Zuhilfenahme des Krümmungskreises an φ im Punkte $\xi^{(\nu-1,\nu)}$. Nach Figur 4 hat man:

$$\lim \frac{\varkappa_2^{(\nu)2}}{\varkappa_1^{(\nu-1)}} = \lim \frac{\varkappa_2'^{(\nu)2}}{\varkappa_1'^{(\nu-1)}}$$
$$\frac{\varkappa_2'^{(\nu)2}}{\varkappa_1'^{(\nu-1)}} = \varkappa_1'^{(\nu-1)} + s'^{(\nu-1)};$$

also: $\lim \frac{\varkappa_2^{(\nu)2}}{\varkappa_1^{(\nu-1)}} = \lim (\varkappa_1'^{(\nu-1)} + s'^{(\nu-1)}) = s^{(\nu-1)}.$

Statt der Sehne $s^{(\nu-1)}$ könnte man auch den Krümmungsradius einführen und erhielte:

$$\lim \frac{\varkappa_2^{(\nu)\,2}}{\varkappa_1^{(\nu-1)}} = 2\varrho^{(\nu)}_{(\nu-1,\,\nu)} \sin\left(g^{(\nu-1)}g^{(\nu)}\right).$$

I. b)

n Gerade, die einem Büschel angehören.

$a_x^n = 0$ zerfalle wieder in n Gerade; diese sollen jedoch alle durch ein und denselben Punkt gehen, und zwar durch den Punkt $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, was durch Koordinatentransformation stets erreichbar ist. Es ist:

$$a_x^n \equiv \prod_1^n{}_\nu\, g_x^{(\nu)} \equiv \prod_1^n{}_\nu\, (x_1\lambda_1^{(\nu)} + x_2\lambda_2^{(\nu)}) = 0.$$

Nach dem Abelschen Theorem ist wieder:

$$\sum_1^{m\cdot n}{}_\pi \left(\frac{\alpha_x^{n-3}(c\,x\,d\,x)}{a_x^{(n-1)}a_c} \right)_\pi = 0 \qquad \begin{cases} a^n_{x(\pi)} = 0 \\ \varphi^m_{x(\pi)} = 0 \end{cases}$$

Ganz analog wie in der ersten Ableitung kann man diese Summe auch schreiben:

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{\alpha_x^{n-3}(c\,x\,d\,x)}{\Pi_x^{(\nu)} \cdot g_c^{(\nu)}} \right)_{\mu,\,\nu} = 0,$$

wobei man wieder für alle Punkte der ν^{ten} Geraden diese selbst als Grundkurve betrachten kann. α_x^{n-3} ist wieder eine beliebige Funktion $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der homogenen Variabelen x_1, x_2, x_3 und läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\alpha_x^{n-3} \equiv \sum_0^{n-3}{}_\pi\, x_3^\pi \cdot \alpha_{x_1 x_2}^{n-\pi-3},$$

wobei jetzt $\alpha_{x_1 x_2}^{n-\pi-3}$ eine beliebige homogene Funktion $(n-\pi-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der beiden Variabelen x_1 und x_2 allein ist. Sie läßt sich selbst wieder darstellen als eine lineare Kombination von $(n-\pi-2)$ speziellen Funktionen derselben Ordnung und derselben zwei Variabelen. Als solche spezielle Funktionen wähle man die Produkte von je $(n-\pi-3)$ der n Geraden; deren gibt es im ganzen $\binom{n}{\pi+3}$, also für $\pi < (n-3)$ mehr als $(n-\pi-2)$. Diese überzähligen speziellen Funktionen sind aber nicht unabhängig von den übrigen. Man wähle ganz willkürlich aus den $\binom{n}{\pi+3}$ Funktionen $(n-\pi-2)$ aus. α_x^{n-}

ist also darstellbar als Summe von solchen speziellen Funktionen multipliziert mit $x_3^{\mathfrak{n}}$, und zwar ist die Zahl dieser $\sum_0^{n-3} \mathfrak{n}\,(n-\mathfrak{n}-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Es sei eine von diesen speziellen Funktionen $b_{x_1 x_2}^{n-\mathfrak{n}-3}$. Ohne die Allgemeinheit der Entwickelung aufzuheben, kann man also den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\sum_1^n{}_{\nu} \sum_1^m{}_{\mu} \left(\frac{x_3^{\mathfrak{n}} \cdot b_{x_1 x_2}^{n-\mathfrak{n}-3}(cx\,dx)}{H_x^{(\nu)} \cdot g_c^{(\nu)}} \right)_{\mu,\nu} = 0.$$

Die n Geraden mögen nun so beziffert sein, daß:

$$b_{x_1 x_2}^{n-\mathfrak{n}-3} \equiv g_x^{(\mathfrak{n}+4)} \cdot g_x^{(\mathfrak{n}+5)} \cdots g_x^{(n-1)} \cdot g_x^{(n)};$$

Die Doppelsumme läßt sich dann gekürzt schreiben:

$$\sum_1^{\mathfrak{n}+3}{}_{\nu'} \sum_1^m{}_{\mu} \left(\frac{x_3^{\mathfrak{n}} \cdot (cx\,dx)}{\mathfrak{P}_x^{(\nu')} \cdot g_c^{(\nu')}} \right)_{\mu,\nu'} = 0 \quad \begin{cases} \varphi_x^m = 0 \\ g_x^{(\nu')} = 0 \\ \nu' = 1, 2 \cdots \mathfrak{n}+3. \end{cases}$$

(Hiebei bedeute $\mathfrak{P}_x^{(\nu')}$ das Produkt der ersten $(\mathfrak{n}+3)$ Geraden mit Ausnahme der ν'^{ten}.) Alle anderen Terme sind nämlich identisch null, und Zähler und Nenner wurden nun durch $b_{x_1 x_2}^{n-\mathfrak{n}-3}$ teilbar.

Es wird nun der Ausdruck:

$$\frac{x_3^{\mathfrak{n}} \cdot (cx\,dx)}{\mathfrak{P}_x^{(\nu')} \cdot g_c^{(\nu')}}$$

unter der Bedingung:

$$g_x^{(\nu')} \equiv \lambda_1^{(\nu')} x_1 + \lambda_2^{(\nu')} x_2 = 0$$

in folgenden übergehen:

$$\frac{-\,x_3^{\mathfrak{n}}(x_1\,dx_3)\, g_c^{(\nu')} \cdot \lambda_2^{(\nu')\,\mathfrak{n}+1}}{g_c^{(\nu')} \cdot x_1^{\mathfrak{n}+2} \cdot \prod_1^{\mathfrak{n}+3}{}_{j}{}^{(\nu')} (\lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(\nu')} - \lambda_2^{(j)} \cdot \lambda_1^{(\nu')})}$$

denn:

$$(cx\,dx) = \frac{1}{\lambda_2^{(\nu')2}} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & \lambda_2^{(\nu')} x_1 & \lambda_2^{(\nu')} dx_1 \\ c_2 & -\lambda_1^{(\nu')} x_1 & -\lambda_1^{(\nu')} dx_1 \\ c_3 & \lambda_2^{(\nu')} x_3 & \lambda_2^{(\nu')} dx_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_2^{(\nu')}}\, g_c^{(\nu')} \cdot (x_1\,dx_3 - x_3\,dx_1) = -\frac{1}{\lambda_2^{(\nu')}} \cdot g_c^{(\nu')} \cdot (x_1\,dx_3)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{P}_x^{(\nu')}} = \frac{\lambda_2^{(\nu')\,\mathfrak{n}+2}}{\prod_1^{\mathfrak{n}+3}{}_{j}{}^{(\nu')} (\lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(\nu')} - \lambda_2^{(j)} \lambda_1^{(\nu')}) \cdot x_1^{\mathfrak{n}+2}};$$

Die Doppelsumme geht also, nachdem noch durch $g_c^{(\nu')}$ gekürzt wird, über in:

$$\sum_1^{n+3}{}' \sum_1^m{}_\mu \frac{-x_3^n \cdot \frac{(x_1\, dx_3)}{x_1^2} \cdot \lambda_2^{(\nu')\,n+1}}{x_1^n \cdot \prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} (\lambda_1^{(j)}\lambda_2^{(\nu')} - \lambda_2^{(j)}\lambda_1^{(\nu')})} = 0\,.$$

Integriert man nun, so erhält man:

$$\sum_1^{n+3}{}' \sum_1^m{}_\mu \frac{\lambda_2^{(\nu')\,n+1}}{\prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} (\lambda^{(j)}\lambda^{(\nu')})} \cdot \left(\frac{x_3}{x_1}\right)_{\mu,\nu'}^{n+1} = 0\,.$$

Die Integrationskonstante ist hier null, da die Gleichung auch bestehen muß für die m fach zählende Gerade $x_3 = 0$, für welche alle Terme der linken Seite verschwinden.

Es ist ganz analog wie pag. 11 in der absoluten Maßgeometrie im Büschel:

$$\frac{x_1^{(j)}}{x_2^{(j)}} = -\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = -\frac{\sin(g^{(j)}x_1)}{\sin(g^{(j)}x_2)} \cdot \sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta_2}$$

hier bedeute $(g^{(j)}x_1)$ den Winkel von $g^{(j)}$ gegen die Koordinatenachse x_1 und analog $(g^{(j)}x_2)$. Δ_1 und Δ_2 sind die Werte von $\frac{x_1}{x_2}$, welche den Tangenten entsprechen, die vom Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ an den Fundamentalkegelschnitt gelegt werden können:

Man kann also setzen:

$$\lambda_1^{(j)} = \varrho_j \sin(g^{(j)}x_2),\ \lambda_2^{(j)} = \varrho_j \sin(g^{(j)}x_1) \cdot \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}$$

und erhält so:

$$\frac{\lambda_2^{(\nu')\,n+1}}{\prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} (\lambda^{(j)}\lambda^{(\nu')})} = \frac{\varrho_{\nu'}^{n+1} \cdot \sin(g^{(\nu')}x_1)^{n+1} \cdot (\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta_2})^{n+1}}{\varrho_{\nu'}^{n+1} \cdot \prod_1^{n+3}{}_j \varrho_j \cdot (\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta_2})^{n+2} \cdot \prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')}},$$

wobei:

$$\prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} \equiv \prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} (\sin(g^{(j)}x_2)\ \sin(g^{(\nu')}x_1)).$$

Man kann sich nun die Koordinatenachsen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ so gelegt denken, daß sie im Sinne der absoluten Geometrie zueinander senkrecht stehen. Dann wird:

$$\prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} = \prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} \sin(g^{(j)}g^{(\nu')})$$

oder, wenn man den Winkel $(g^{(j)}g^{(\nu')})$ mit $\gamma_{j,\nu'}$ bezeichnet:

$$\prod_{1}^{n+3}{}_{j}^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}.$$

Unsere Doppelsumme geht also mit Vernachlässigung der allen Termen gemeinsamen Faktoren über in:

$$\sum_{1}^{n+3}{}_{\nu'} \sum_{1}^{m}{}_{\mu} \frac{1}{\prod_{1}^{n+3}{}_{j}^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} \cdot \left(\frac{\sin (g^{(\nu')} x_1) \cdot x_3}{x_1}\right)_{\mu,\nu'}^{n+1} = 0.$$

Nach Figur 5 hat man nun:

$$\left(\frac{x_3}{x_1}\right)_{\mu,\nu'} = \frac{\sin (g^{(\mu,\nu')} x_3)}{\sin (g^{(\mu,\nu')} x_1)} \cdot \sqrt{A_1' \cdot A_2'}$$

(A_1' und A_2' sind die Werte $\frac{x_3}{x_1}$, welche den Tangenten vom Punkte $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ an den Fundamentalkegelschnitt entsprechen.)

Nach dem Sinussatze ist:

$$\frac{\sin (g^{(\nu')} x_1)}{\sin (g^{(\mu\nu')} x_1)} = \frac{\sin m_{\mu,\nu'}}{\sin l_{\mu,\nu'}}.$$

Ferner ist:

$$\sin m_{\mu,\nu'} \cdot \sin (g^{(\mu,\nu')} x_3) = \sin l_{\mu,\nu'};$$

$l_{\mu,\nu'}$ ist hiebei die Entfernung des μ^{ten} Punktes auf der ν'^{ten} Geraden von der Geraden $x_3 = 0$, $l_{\mu,\nu'}$ ist die Vektorenlänge desselben Punktes nach dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Man erhält nun also schließlich die Relation:

$$\sum_{1}^{n+3}{}_{\nu'} \frac{1}{\prod_{1}^{n+3}{}_{j}^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} \sum_{1}^{m}{}_{\mu} \left(\frac{\sin l_{\mu,\nu'}}{\sin l_{\mu,\nu'}}\right)_{\varphi}^{n+1} = 0.$$

Diese Formel ist ohne weiteres dual übertragbar.

In der Euklidschen Geometrie sind die Sinus von Strecken durch diese selbst zu ersetzen. Ferner kann man noch statt einer im Endlichen liegenden Geraden $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade einführen, wodurch dann unsere Formel in folgende übergeht:

$$\sum_{1}^{n+3}{}_{\nu'} \frac{1}{\prod_{1}^{n+3}{}_{j}^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} \sum_{1}^{m}{}_{\mu} \left(\frac{1}{l_{\mu,\nu'}}\right)_{\varphi}^{n+1} = 0.$$

Ich will die Resultate dieser Entwickelung wieder kurz zusammenfassen:

Werden n Gerade eines Strahlenbüschels von einer Kurve m^{ter} Ordnung geschnitten, so bestehen im Falle $m > n-2$, $p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Relationen zwischen den $m \cdot n$ Schnittpunkten, welche vollständig unabhängig voneinander sind. Man nehme von den n Geraden irgend welche $(\mathfrak{n}+3)$ heraus, dann besteht für die Schnittpunkte dieser $(\mathfrak{n}+3)$ Geraden mit $\varphi_x^m = 0$ die Relation:

$$\sum_{1}^{\mathfrak{n}+3}{}_{\nu'} \frac{1}{\prod_{1}^{\mathfrak{n}+3}{}_{j}^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} - \sum_{1}^{m}{}_{\mu} \left(\frac{\sin l_{\mu\nu'}}{\sin \mathfrak{l}_{\mu\nu'}}\right)_{\varphi}^{\mathfrak{n}+1} = 0,$$

wobei $\gamma_{j,\nu'}$ den Winkel der Geraden $g_x^{(j)}$ gegen $g_x^{(\nu')}$ bedeutet, $l_{\mu\nu'}$ den Abstand des μ^{ten} Schnittpunktes auf der ν'^{ten} Geraden von einer beliebigen festen Geraden, die nicht dem Büschel angehört, und $\mathfrak{l}_{\mu\nu'}$ den Abstand eben dieses Punktes vom Büschelscheitel. Im übrigen geht „$\mathfrak{n}$“ von 0 bis $(n-3)$. In der Euklidschen Geometrie müssen die Sinus der Strecken durch diese selbst ersetzt werden, auch kann noch $l_{\mu\nu'}$ gleich 1 angenommen werden.

Was die weitere Diskussion der hiemit aufgestellten Relationen — ich will sie ein für allemal die Büschelrelationen heißen — betrifft, so gelten analoge bezw. dieselben Verhältnisse wie beim Carnotschen Satze. Die Zulässigkeit der Umkehrung des Büschelsatzes läßt sich genau auf dem Wege beweisen, wie beim Carnotschen. Die Zusätze betreffend ist klar, daß die erste Modifikation — die Einführung einer einfach berührenden Kurve — nicht in Betracht kommen kann. Geht $\varphi_x^{n_i} = 0$ durch den Scheitel von n Strahlen, so können Beziehungen eingeführt werden, welche bei einer in diesem Scheitel die $\varphi_x^m = 0$ $n$punktig berührenden Kurve spezieller Art gelten. Es sei hiezu nur noch bemerkt, daß für $n = 3$ die Inflexionstangente eingeführt werden kann, falls die drei Strahlen durch einen Inflexionspunkt gehen, im anderen Falle (jedoch $n = 3$) kann der Krümmungskreis eingeführt werden.

Setzen sich die n Geraden von $a_x^n = 0$ aus Strahlenbüscheln und einzelnen Geraden zusammen, so kann durch spezielle Wahl von α_x^{n-3} dieser Fall stets auf die beiden behandelten zurückgeführt werden.

II.

n Kegelschnitte, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen.

$$a_x^{2n} \equiv k_x^{(1)\,2} \cdot k_x^{(2)\,2} \cdot \ldots \cdot k_x^{(n)\,2} \equiv \prod_{1}^{n}{}_{\nu} k_x^{(\nu)\,2} \equiv \prod\nolimits_x = 0.$$

Es werde vorausgesetzt, daß nicht mehr als zwei der n Kegelschnitte durch einen und denselben Punkt gehen.

Für ein Schnittpunktsystem von $a_x^{2n} = 0$ mit $\varphi_x^m = 0$ hat man:

$$\sum_{1}^{m\cdot 2n}{}_{\pi}\left(\frac{\alpha_x^{2n-3}(cx\,dx)}{a_x^{2n-1}a_c}\right)_{\pi}=0 \qquad \begin{cases} a_{x(\pi)}^{2n}=0 \\ \varphi_{x(\pi)}^{m}=0 \end{cases}.$$

Analog den früheren Betrachtungen läßt sich diese Summe folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\sum_{1}^{2m}{}_{\mu}\left(\frac{\alpha_x^{n-3}(cx\,dx)}{\prod_x^{(\nu)}\cdot k_x^{(\nu)}k_c^{(\nu)}}\right)_{\mu,\nu}=0.$$

($\Pi_x^{(\nu)}$ bedeute hier wieder das Produkt aller Kegelschnitte mit Ausnahme des ν^{ten}.)

Bei Festhaltung von ν kann man $k_x^{(\nu)2}$ als Grundkurve betrachten, und es ist also der Wert zu ermitteln, den

$$\frac{\alpha_x^{2n-3}(cx\,dx)}{\Pi_x^{(\nu)}\cdot k_x^{(\nu)}k_c^{(\nu)}}$$

für einen Schnittpunkt von $k_x^{(\nu)^2}=0$ und $\varphi_x^{m}=0$ annimmt, wenn das Differential längs $k_x^{(\nu)^2}=0$ hinzuleiten ist.

An Stelle der ganz beliebigen Funktion α_x^{2n-3} kann man $p_2=\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ spezielle Funktionen treten lassen, die ich folgendermaßen bestimme. Die n Kegelschnitte schneiden sich in $\frac{2n(2n-2)}{2}$ Punkten. Von diesen sondere ich n ab, die sich auf die n Kegelschnitte derart verteilen, daß auf jedem zwei und nur zwei derselben liegen. Durch die übrigen $\frac{2n\cdot(2n-3)}{2}$ Punkte ist eine Kurve $\Omega_x^{2n-3}=0$ gerade vollständig bestimmt. Man kann nun stets wenigstens auf $p_2=\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ verschiedene Arten n solcher Punkte absondern, ohne daß die zugehörigen $\Omega_x^{2n-3}=0$ alle durch einen und denselben Punkt gehen. Infolgedessen ist die Darstellung von α_x^{2n-3} als eine algebraische Summe von p_2 solchen speziellen Funktionen stets möglich und man kann, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu stören, an die Stelle von α_x^{2n-3} nacheinander p_2 solcher Ω_x^{2n-3} treten lassen, welche gleich null gesetzt nicht Kurven mit ein und demselben festen Punkte darstellen dürfen.

Statt des früheren Ausdruckes betrachte man also folgenden:

$$\left(\frac{\Omega_x^{2n-3}(cx\,dx)}{\Pi_x^{(\nu)}\cdot k_x^{(\nu)}k_c^{(\nu)}}\right)_{\mu,\nu}.$$

Es seien $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ und $\xi^{(\nu,\nu+1)}$ die beiden Punkte auf $k_x^{(\nu)^2}=0$, durch welche $\Omega_x^{2n-3}=0$ nicht geht; dann läßt sich $k_x^{(\nu)^2}=0$ stets in der Form darstellen:

$$t_x^{(1,\nu)}\cdot t_x^{(2,\nu)}+\lambda_\nu(u_x^{(\nu)})^2=0,$$

wobei $t_x^{(1,\nu)} = 0$ und $t_x^{(2,\nu)} = 0$ bezw. die Tangenten im Punkte $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ und $\xi^{(\nu,\nu+1)}$ an $k_x^{(\nu)^2} = 0$ und $u_x^{(\nu)} = 0$ die Verbindungsgerade von $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ und $\xi^{(\nu,\nu+1)}$ sind.

Die Punkte des Kegelschnittes $k_x^{(\nu)} = 0$ lassen sich nun auf folgende Weise durch zwei homogene Parameter rational darstellen:

(1) $$x_1^{(\nu)} t_x^{(1,\nu)} + x_2^{(\nu)} u_x^{(\nu)} = 0$$

(2) $$t_x^{(1,\nu)} \cdot t_x^{(2,\nu)} + \lambda_\nu (u_x^{(\nu)})^2 = 0.$$

Aus (2) folgt:

$$t_x^{(1,\nu)} : u_x^{(\nu)} = (-\lambda_\nu u_x^{(\nu)}) : t_x^{(2,\nu)}.$$

Aus (1):

$$t_x^{(1,\nu)} : u_x^{(\nu)} = (-x_2^{(\nu)}) : x_1^{(\nu)},$$

also auch:

$$t_x^{(2,\nu)} : \lambda_\nu u_x^{(\nu)} = x_1^{(\nu)} : x_2^{(\nu)}.$$

Daher:

$$t_x^{(1,\nu)} : t_x^{(2,\nu)} : u_x^{(\nu)} = (-x_2^{(\nu)^2}) : (\lambda_\nu x_1^{(\nu)^2}) : (x_1^{(\nu)} x_2^{(\nu)})$$

oder auch:

$$t_x^{(1,\nu)} = \varrho\,(-x_2^{(\nu)^2})$$
$$t_x^{(2,\nu)} = \varrho\,(\lambda_\nu x_1^{(\nu)^2})$$
$$u_x^{(\nu)} = \varrho\,(x_1^{(\nu)} x_2^{(\nu)}).$$

Als Wert von $(cx\,dx)$ erhält man:

$$(cx\,dx) = \frac{1}{(t^{(1)}t^{(2)}u)} \cdot (t_c t_x u_{dx})$$

$$= \frac{\varrho^2}{(t^{(1)}t^{(2)}u)} \begin{vmatrix} C_1 & -x_2^2 & -2x_2\,dx_2 \\ C_2 & \lambda x_1^2 & 2\lambda x_1\,dx_1 \\ C_3 & x_1 x_2 & x_1\,dx_2 + x_2\,dx_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varrho^2}{(t^{(1)}t^{(2)}u)} (x\,dx)\,(C_1 \lambda x_1^2 - C_2 x_2^2 + 2\lambda C_3 x_1 x_2),$$

wobei

$$C_1 = t_c^{(1)},\ C_2 = t_c^{(2)},\ C_3 = u_c.$$

Also:

$$(cx\,dx)_\nu = \frac{\varrho^2}{(t^{(1,\nu)}t^{(2,\nu)}u^{(\nu)})} (C_1^{(\nu)} \lambda_\nu x_1^{(\nu)^2} - C_2^{(\nu)} x_2^{(\nu)^2} + 2\lambda_\nu C_3^{(\nu)} x_1^{(\nu)} x_2^{(\nu)}).$$

Ferner geht $k_x^{(\nu)} k_c$ über in:

$$t_c^{(1,\nu)} \cdot t_x^{(2,\nu)} + t_c^{(2,\nu)} t_x^{(1,\nu)} + 2\lambda_\nu u_x^{(\nu)} \cdot u_c$$
$$= \varrho\,(C_1^{(\nu)} \lambda_\nu x_1^{(\nu)^2} - C_2^{(\nu)} x_2^{(\nu)^2} + 2\lambda_\nu C_3^{(\nu)} x_1^{(\nu)} \cdot x_2^{(\nu)}).$$

Substituiert man in dem Ausdrucke $\frac{\Omega_x^{2n-3}}{\Pi_x^{(\nu)}}$ für die x_i die Werte in $x_1^{(\nu)}$ und $x_2^{(\nu)}$, die sich dafür aus den obigen Formeln von $t_x^{(1,\nu)}$, $t_x^{(2,\nu)}$ und $u_x^{(\nu)}$ berechnen lassen, so geht er über in $\frac{K_\nu}{\varrho\, x_1^{(\nu)} \cdot x_2^{(\nu)}}$, da Ω_x^{2n}—

und $\Pi_x^{(\nu)}$ für dieselben Punkte auf $k_x^{(\nu)^2} = 0$ verschwinden mit Ausnahme der zwei Punkte $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ und $\xi^{(\nu,\nu+1)}$, denen die Parameterwerte $\varkappa_2^{(\nu)} = 0$ und $\varkappa_1^{(\nu)} = 0$ bezw. entsprechen. K_ν ist eine feste Konstante, die, wie sich sogleich zeigen wird, nicht explicite dargestellt zu werden braucht. Man erhält nun also:

$$\sum_1^n \sum_1^{2m} \frac{\mathsf{K}_\nu}{(t^{(1,\nu)} t^{(2,\nu)} u^{(\nu)})} \cdot \frac{(\varkappa^{(\mu,\nu)} d\varkappa^{(\mu,\nu)})}{\varkappa_1^{(\mu,\nu)} \cdot \varkappa_2^{(\mu,\nu)}} = 0 .$$

Setzt man $\frac{\mathsf{K}_\nu}{(t^{(1,\nu)} t^{(2,\nu)} u^{(\nu)})} = K_\nu$, so läßt sich dieses schreiben:

$$\sum_1^n \sum_1^{2m} K_\nu d \log \left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)_{\mu,\nu} = 0 .$$

Die K_ν müssen nun alle unter sich gleich sein. Denn wie bei der Ableitung des Abelschen Theoremes von Harnack bewiesen wurde (Math. Ann. B 9, pag. 381), bestehen die Relationen desselben noch weiter, wenn $\varphi_x^m = 0$ durch einen vielfachen Punkt von $a_x^n = 0$ geht, d. h. wenn einzelne Glieder der in demselben auftretenden Summe unendlich werden. Angenommen $q_x^m = 0$ gehe durch den Schnittpunkt $\xi^{(\nu,\nu+1)}$ der beiden Kegelschnitte $k_x^{(\nu)^2} = 0$ und $k_x^{(\nu+1)^2} = 0$ einmal einfach (d. h. ohne den einen oder anderen zu berühren), so wird, wie aus der Parameterdarstellung pag. 23 ersichtlich ist, ein $\varkappa_1^{(\nu)} = 0$ und ein $\varkappa_2^{(\nu+1)} = 0$, und zwar verschwinden beide von derselben Ordnung. $\varkappa_1^{(\nu)}$ und $\varkappa_2^{(\nu)}$ treten nun in der aufgestellten Formel auf in der Gestalt:

$$d \log \frac{\varkappa_2^{(\nu+1) K_\nu + 1}}{\varkappa_1^{(\nu) K_\nu}} .$$

Dieses Differential kann aber nur dann für von gleicher Ordnung verschwindende $\varkappa_2^{(\nu+1)}$ und $\varkappa_1^{(\nu)}$ stetig sein, wenn auch $K_{\nu+1} = K_\nu$. Analog gilt dann weiter: $K_{\nu+2} = K_{\nu+1}$ u. s. w.

Da nun alle K_ν unter sich gleich sind, kann man schreiben:

$$\sum_1^n \sum_1^{2m} d \log \left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)_{\mu,\nu} = 0 .$$

Durch Integration von dem Schnittpunktsysteme $a_x^{2n} = 0$ und $\psi_x^m = 0$ zu dem von $a_x^{2n} = 0$ und $q_x^m = 0$ erhält man:

$$\left[\sum_1^n \sum_1^{2m} \log \left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)_{\mu,\nu}\right]_{\psi}^{\varphi} = 2h\pi i \qquad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Durch Übergang zur Exponentialfunktion erhält man:

$$\frac{\prod_1^n \prod_1^{2m} \left(\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\varphi}{\prod_1^n \prod_1^{2m} \left(\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\psi} = 1.$$

Für $\psi_x^m = 0$ kann man noch eine beliebige feste Gerade, $m$fach zählend, einführen. Bezeichnet man den Wert von

$$\prod_1^{2m} \left(\frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}}\right)_{g_x=0} = C,$$

so hat man auch:

$$\prod_1^n \prod_1^{2m} \left(\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_\varphi = C^m.$$

(Beim Carnotschen Theorem war diese Konstante $(-1)^n$ und zwar in allen n-Ecksrelationen, was bei dem Kegelschnitttheorem im allgemeinen nicht stattfindet. Den $p_2 = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ unabhängigen Relationen werden für gewöhnlich ebensoviel unabhängige Konstante C entsprechen. Diese selbst sind gänzlich unabhängig von der Eigenart und gegenseitigen Lage von $\varphi_x^m = 0$ gegen $a_x^{2n} = 0$, allein abhängig von der Natur und gegenseitigen Beziehung der die $a_x^{2n} = 0$ konstituierenden n Kegelschnitte.)

$\frac{x_2^{(\nu)}}{x_1^{(\nu)}}$ stellt nach der Parameterdarstellung pag. 23 bis auf einen konstanten Faktor das Sinusverhältnis der Winkel dar, welche eingeschlossen werden von der Tangente $t_x^{(1,\nu)}$ und dem Strahle von $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ nach dem von $\varphi_x^m = 0$ ausgeschnittenen Punkte und von der Geraden $u_x^{(\nu)} = 0$ und demselben Strahle. Bekanntlich ändert sich nun dieses Sinusverhältnis auch nur um eine Konstante, wenn der Scheitel $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ der beiden Winkel auf irgend einen anderen Punkt des Kegelschnittes $k_x^{(\nu)^2} = 0$ — er heiße $\xi^{(\nu)}$ — rückt. Läßt man die konstanten Größen, die durch Einführung der Sinusverhältnisse und der Punkte $\xi^{(\nu)}$ in die Kegelschnittrelation eintreten, in die Konstante C eintreten, so wird unsere Formel:

$$\prod_1^n \prod_1^{2m} \left(\frac{\sin\left(\xi^{(\nu-1,\nu)}\xi^{(\nu)}x^{(\mu,\nu)}\right)}{\sin\left(\xi^{(\nu,\nu+1)}\xi^{(\nu)}x^{(\mu,\nu)}\right)}\right)_\varphi = C'^m.$$

Hiebei bezeichnet $(\xi^{(\nu,\nu+1)}\xi^{(\nu)}x^{(\mu,\nu)})$ den Winkel, dessen Scheitel $\xi^{(\nu)}$ ist und dessen Schenkel durch die beiden Punkte $\xi^{(\nu-1,\nu)}$ und $x^{(\mu,\nu)}$ gehen, wobei $x^{(\mu,\nu)}$ einer der Schnittpunkte von $\varphi_x^m = 0$ mit dem Kegelschnitte $k_x^{(\nu)^2} = 0$ ist.

Diese Formel ist in der absoluten Geometrie ohne weiteres dual übertragbar, während in der Euklidschen Geometrie schließlich die Sinusverhältnisse von Strecken durch die Verhältnisse der Strecken selbst zu ersetzen sind.

Die Resultate dieser zweiten Abteilung lassen sich nun folgendermaßen zusammenfassen:

Sind n feste Kegelschnitte gegeben, von denen sich nicht mehr als zwei in ein und demselben Punkte schneiden, so lassen sich von den $\frac{2n(2n-2)}{2}$ Schnittpunkten dieser unter sich auf wenigstens $p_2 = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ verschiedene Arten n Punkte $\xi^{(\nu-1,\,\nu)}$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$, herausnehmen, von denen immer zwei und nur zwei auf je einem der n Kegelschnitte liegen, so daß die jedesmal übrigbleibende Punktgruppe nicht stets (alle p_2 mal) ein und denselben Punkt enthält. $\xi^{(\nu-1,\,\nu)}$ sei ein Punkt des $(\nu-1)^{\text{ten}}$ und ν^{ten} Kegelschnittes. Man bestimme ferner noch auf jedem Kegelschnitte einen festen Punkt, $\xi^{(\nu)}$ auf dem ν^{ten} Kegelschnitte. Dann besteht für ein Schnittpunktsystem einer $\varphi_x^m = 0$ mit den n Kegelschnitten die Relation:

$$\prod_1^n{}_{\nu} \prod_1^{2m}{}_{\mu} \left(\frac{\sin\left(\xi^{(\nu-1,\,\nu)}\,\xi^{(\nu)}\,x^{(\mu,\,\nu)}\right)}{\sin\left(\xi^{(\nu,\,\nu+1)}\,\xi^{(\nu)}\,x^{(\mu,\,\nu)}\right)} \right)_{\varphi} = C'^{m}.$$

C' ist eine Konstante, welche nur abhängig ist von der Eigenart der die Grundkurve repräsentierenden Kegelschnitte, von der gegenseitigen Lage derselben, von der Wahl der $\xi^{(\nu-1,\,\nu)}$ und der der $\xi^{(1)}$.

Was die Umkehrung dieses Theoremes betrifft, gilt Analoges wie beim Carnotschen Theoreme; auch existieren in Beziehung auf die Zusätze Analogien.

III.

Ein Kegelschnitt und eine bezw. zwei Gerade.

In dieser Abteilung sollen die Relationen aufgestellt werden, welche bestehen, falls die Grundkurve $a_x^n = 0$ in einen Kegelschnitt und eine Gerade, oder in einen Kegelschnitt und zwei Gerade zerfällt. Die Allgemeinheit wird hier durchaus nicht gestört, wenn man die Grundkurve $a_x^3 = 0$ oder $a_x^4 = 0$ in der einfachsten Form annimmt, auf welche sie transformiert werden kann.

1) $$a_x^3 \equiv x_3(x_1 x_2 + \lambda x_3^2) = 0.$$

Für ein Schnittpunktsystem $a_x^3 = 0$ mit $\varphi_x^m = 0$ gilt nach dem Abelschen Theorem:

$$\sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{(cx\,dx)}{c_3 \cdot (x_1 x_2 + \lambda x_3^2)} \right)_{\mu} + \sum_1^{2m}{}^{\mu'} \left(\frac{(cx\,dx)}{x_3 \cdot (c_1 x_2 + c_2 x_1 + 2\lambda c_3 x_3)} \right)_{\mu'} = 0.$$

$$[x_3 = 0] \qquad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

(Die erste Summe repräsentiert die Glieder des Schnittpunktsystems von $x_3 = 0$ mit $\varphi_x^m = 0$, die zweite die Glieder desjenigen von $(x_1 x_2 + \lambda x_3^2) = 0$ mit $\varphi_x^m = 0$.)

Für $x_3 = 0$ geht die erste Summe über in:

$$\sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{c_3 (x_1\,dx_2)}{x_1 x_2 \cdot c_3} \right)_{\mu} = \sum_1^m{}^{\mu} d \log \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}}.$$

Für $x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0$ geht die zweite Summe über in:

$$\sum_1^{2m}{}^{\mu'} \left(\frac{(x_2\,dx_3)}{x_2 x_3} \right)_{\mu'} = \sum_1^{2m}{}^{\mu'} d \log \frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}},$$

da:

$$(cx\,dx) = \frac{1}{x_2} \begin{vmatrix} c_1 x_2 & x_1 x_2 & x_2\,dx_1 \\ c_2 & x_2 & dx_2 \\ c_3 & x_3 & dx_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_2} \begin{vmatrix} c_1 x_2 + c_2 x_1 + 2\lambda c_3 x_3 & 0 & 0 \\ c_2 & x_2 & dx_2 \\ c_3 & x_3 & dx_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{c_1 x_2 + c_2 x_1 + 2\lambda c_3 x_3}{x_2} (x_2\,dx_3).$$

Unsere Relation wird also folgende:

$$\sum_1^m{}^{\mu} d \log \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}} + \sum_1^{2m}{}^{\mu'} d \log \frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}} = 0$$

$$[x_3 = 0] \qquad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0].$$

Also auch:

$$\left[\log \prod_1^m{}^{\mu} \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}} + \log \prod_1^{2m}{}^{\mu'} \frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}} \right]_{\psi}^{\varphi} = 2h\pi i.$$

Und:

$$\frac{\left(\prod_1^m{}^{\mu} \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}} \cdot \prod_1^{2m}{}^{\mu'} \frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}} \right)_{\varphi}}{\left(\prod_1^m{}^{\mu} \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}} \cdot \prod_1^{2m}{}^{\mu'} \frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}} \right)_{\psi}} = 1.$$

Nimmt man für $\psi_x^m = 0$ eine m-fach zählende feste Gerade $g_x = 0$ und setzt

$$\left(\left(\frac{x_2}{x_1} \right) \cdot \left(\frac{x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} \cdot \frac{x_3^{(2)}}{x_2^{(2)}} \right) \right)_g = C,$$

$$[x_3 = 0] \quad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

so hat man schließlich:

$$\left(\prod_{1}^{m}{}_{\mu} \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}} \cdot \prod_{1}^{2m}{}_{\mu'} \frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}} \right)_{\varphi} = C^m.$$

$$[x_3 = 0] \quad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

Diese Formel läßt sich noch etwas umformen, so daß ihr geometrischer Sinn besser hervortritt.

Es werde mit $\xi^{(1)}$ der Punkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, mit $\xi^{(2)}$ der Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, mit ξ irgend ein Punkt des Kegelschnittes, mit $x^{(\mu)}$ die Schnittpunkte von $x_3 = 0$, mit $\varphi_x^m = 0$ und mit $x^{(\mu')}$ diejenigen von dem Kegelschnitt mit $\varphi_x^m = 0$ bezeichnet.

Es ist dann:

$$\frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}} = \frac{\sin \overline{\xi^{(2)} x^{(\mu)}}}{\sin \overline{\xi^{(1)} x^{(\mu)}}} \cdot c$$

und:

$$\frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}} = \frac{\sin \left(\xi^{(1)} \xi x^{(\mu')} \right)}{\sin \left(\xi^{(2)} \xi x^{(\mu')} \right)} \cdot c'.$$

Also:

$$\prod_{1}^{m}{}_{\mu} \frac{\sin \overline{\xi^{(2)} x^{(\mu)}}}{\sin \overline{\xi^{(1)} x^{(\mu)}}} \cdot \prod_{1}^{2m}{}_{\mu'} \frac{\sin \left(\xi^{(1)} \xi x^{(\mu')} \right)}{\sin \left(\xi^{(2)} \xi x^{(\mu')} \right)} = C'^m,$$

wobei jetzt $C' = C \cdot c \cdot c'^2$ und c und c' bestimmte Konstante sind, deren Bedeutung aus den vorangegangenen Untersuchungen klar ist. In der Euklidschen Geometrie sind wieder die Sinusverhältnisse der Strecken durch die Verhältnisse der Strecken selbst zu ersetzen. Ferner erkennt man für die Euklidsche Geometrie, daß die Konstante $C' = -1$ ist, falls der Kegelschnitt ein Kreis ist (man braucht nur statt der beliebigen $g_x = 0$ eine zu $x_3 = 0$ parallele Tangente an den Kreis zu legen).

Bemerkenswert ist auch, daß aus dem obigen Theorem das Kegelschnitttheorem der zweiten Abteilung abgeleitet werden kann. Man braucht nämlich nur die obige Relation für jeden der n Kegelschnitte mit samt seiner Verbindungsgeraden $(\xi^{(\nu-1,\nu)}, \xi^{(\nu,\nu+1)})$ zu bilden, die n Relationen zu multiplizieren und die Produkte der Sinusverhältnisse der Strecken nach dem Carnotschen Theorem gleich $(-1)^{m \cdot n}$ zu setzen. In der Euklidschen Geometrie ist überdies ersichtlich, daß die Konstanten C' von pag. 25 alle $(+1)$ sind, sobald die Kegelschnitte lauter Kreise sind. (Es sei nebenbei bemerkt, daß das Kegelschnitttheorem für Kreise nicht alle Relationen liefert, wenn $n > 2$, da dann mehr als zwei der Kegelschnitte durch denselben Punkt gehen.)

2) $$a_x^3 \equiv x_i(x_1 x_2 + \lambda x_3^2) = 0.$$

Analog 1) gilt:

$$\sum_1^m{}_\mu \left(\frac{(c\,x\,d\,x)}{(x_1 x_2 + \lambda x_3^2)\,c_1}\right)_\mu + \sum_1^{2m}{}_{\mu'} \left(\frac{(c\,x\,d\,x)}{x_1(c_1 x_2 + c_2 x_1 + 2\lambda c_3 x_3)}\right)_{\mu'} = 0.$$

$$[x_1 = 0] \qquad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

Nun ist:

$$\sum_1^m{}_\mu \left(\frac{(c\,x\,d\,x)}{(x_1 x_2 + \lambda x_3^2)\,c_1}\right)_\mu = \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{(x_2\,d\,x_3)}{\lambda x_3^2}\right)_\mu = -\frac{1}{\lambda}\sum_1^m{}_\mu d\,\frac{x_2^{(\mu)}}{x_3^{(\mu)}}.$$

$$[x_1 = 0]$$

Ferner:

$$\sum_1^{2m}{}_{\mu'} \left(\frac{(c\,x\,d\,x)}{x_1(c_1 x_2 + c_2 x_1 + 2\lambda c_3 x_3)}\right)_{\mu'} = \sum_1^{2m}{}_{\mu'} \left(\frac{(x_2\,d\,x_3)}{x_1 \cdot x_2}\right)_{\mu'}$$

$$= \sum_1^{2m}{}_{\mu'} \left(\frac{(x_2\,d\,x_3)}{-\lambda x_3^2}\right)_{\mu'} = \frac{1}{\lambda}\sum_1^{2m}{}_{\mu'} d\,\frac{x_2^{(\mu')}}{x_3^{(\mu')}}.$$

Also besteht die Relation:

$$\sum_1^m{}_\mu d\,\frac{x_2^{(\mu)}}{x_3^{(\mu)}} = \sum_1^{2m}{}_{\mu'} d\,\frac{x_2^{(\mu')}}{x_3^{(\mu')}}.$$

$$[x_1 = 0] \quad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

Durch Integration von einem Schnittpunktsystem auf $\psi_x^m = 0$ bis zu dem auf $\varphi_x^m = 0$ erhält man

$$\left[\sum_1^m{}_\mu \frac{x_2^{(\mu)}}{x_3^{(\mu)}}\right]_\psi^\varphi = \left[\sum_1^{2m}{}_{\mu'} \frac{x_2^{(\mu')}}{x_3^{(\mu')}}\right]_\psi^\varphi.$$

Nimmt man für $\psi_x^m = 0$ eine m-fach zählende beliebige Gerade durch den Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so überzeugt man sich leicht, daß dann:

$$\frac{x_2^{(1)}}{x_3^{(1)}} + \frac{x_2^{(2)}}{x_3^{(2)}} = 0$$

für die beiden Schnittpunkte des Kegelschnittes mit jener Geraden. Also hat man:

$$\sum_1^m{}_\mu \frac{x_2^{(\mu)}}{x_3^{(\mu)}} = \sum_1^{2m}{}_{\mu'} \frac{x_2^{(\mu')}}{x_3^{(\mu')}}.$$

$$[x_1 = 0] \quad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

Und zwar gilt diese Relation für ein Schnittpunktsystem einer beliebigen $\varphi_x^m = 0$ mit einem Kegelschnitt und einer Tangente desselben.

3) $a_x^4 \equiv x_1 \cdot x_2 (a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2) \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot a_x^2 = 0.$

$a_x^2 = 0$ geht durch die beiden Schnittpunkte von $x_3 = 0$ mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$; die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ mit $a_x^2 = 0$ ist:

$$u_x \equiv a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 = 0.$$

Nach dem Abelschen Satze besteht für ein Schnittpunktsystem von $a_x^4 = 0$ mit $\varphi_x^m = 0$ die Relation:

$$\sum_1^{4m} \pi \left(\frac{u_x (c x\, dx)}{a_x^3 a_c} \right)_\pi = 0.$$

Analog den früheren Entwicklungen hat man:

$$\sum_1^m \mu_1 \left(\frac{u_x (c x\, dx)}{x_2 \cdot a_x^2 \cdot c_1} \right)_{\mu_1} + \sum_1^m \mu_2 \left(\frac{u_x (c x\, dx)}{x_1 \cdot a_x^2 \cdot c_2} \right)_{\mu_2} + \sum_1^{2m} \mu_3 \left(\frac{u_x (c x\, dx)}{x_1 x_2 \cdot a_x a_c} \right)_{\mu_3} = 0.$$

$$[x_1 = 0] \qquad [x_2 = 0] \qquad [a_x^2 = 0]$$

Nun ist:

$$\left(\frac{u_x (c x\, dx)}{x_2 a_x^2 \cdot c_1} \right)_{\mu_1} = \left(\frac{(a_{23} x_2 + a_{33} x_3) \cdot c_1 (x_2\, dx_3)}{x_2 \cdot c_1 \cdot (a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2)} \right)_{\mu_1} = d \log \frac{x_3^{(\mu_1)}}{x_2^{(\mu_1)}},$$

$$\left(\frac{u_x (c x\, dx)}{x_1 \cdot a_x^2 \cdot c_2} \right)_{\mu_2} = \left(\frac{(a_{13} x_1 + a_{33} x_3) \cdot c_2 (x_3\, dx_1)}{x_1 (a_{13} x_1 + a_{33} x_3) \cdot x_3 \cdot c_2} \right)_{\mu_2} = d \log \frac{x_1^{(\mu_2)}}{x_3^{(\mu_2)}},$$

$$\left(\frac{u_x (c x\, dx)}{x_1 x_2 \cdot a_x a_c} \right)_{\mu_3} = \left(\frac{u_x (x_2\, dx_3)}{x_1 x_2 (a_{12} x_2 + a_{13} x_3)} \right)_{\mu_3}.$$

Da nämlich:

$$(c x\, dx) = \frac{1}{a_{12} x_2 + a_{13} x_3} (c (a_{12} x_2 + a_{13} x_3)\, x\, dx) = \frac{a_x a_c (x_2\, dx_3)}{a_{12} x_2 + a_{13} x_3}.$$

Es ist nun:

$$u_x \cdot x_3 + a_{12} x_1 \cdot x_2 \equiv a_x^2 = 0;$$

also:

$$\left(\frac{u_x}{x_1 x_2} \right)_{\mu_3} = - \left(\frac{a_{12}}{x_3} \right)_{\mu_3}.$$

Demnach:

$$\left(\frac{u_x (c x\, dx)}{x_1 x_2 \cdot a_x a_c} \right)_{\mu_3} = \left(\frac{- a_{12} (x_2\, dx_3)}{x_3 (a_{12} x_2 + a_{13} x_3)} \right)_{\mu_3} = d \log \frac{(a_{12} x_2 + a_{13} x_3)^{(\mu_3)}}{x_3^{(\mu_3)}}.$$

Analog früheren Entwicklungen erhält man also für ein Schnittpunktsystem von a_x^4 mit φ_x^m:

$$\Pi^\mu \left(\frac{x_3^{(\mu_1)}}{x_2^{(\mu_1)}} \cdot \frac{x_1^{(\mu_2)}}{x_3^{(\mu_2)}} \cdot \frac{(a_{12} x_2 + a_{13} x_3)^{(\mu_3)}}{x_3^{(\mu_3)}} \right)_\varphi = C^m.$$

$$[x_1 = 0] \quad [x_2 = 0] \quad [a_x^2 = 0]$$

Diese Formel läßt sich noch etwas anders schreiben. Der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ werde mit η bezeichnet, der Punkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ mit $\xi^{(1)}$, der Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ mit $\xi^{(2)}$ und ein beliebiger anderer

Punkt des Kegelschnittes mit ξ. Dann läßt sich, anschließend an frühere Bezeichnungsweisen, die Formel in der Form geben:

$$\prod_{\mu}\left(\frac{\sin\overline{\xi^{(1)}x^{(\mu_1)}}}{\sin\overline{\eta x^{(\mu_1)}}}\cdot\frac{\sin\overline{\eta x^{(\mu_2)}}}{\sin\overline{\xi^{(2)}x^{(\mu_2)}}}\cdot\frac{\sin\left(\xi^{(2)}\xi x^{(\mu_3)}\right)}{\sin\left(\xi^{(1)}\xi x^{(\mu_3)}\right)}\right)_{\varphi}=C'^{m}.$$

Durch andere Wahl von u_x als der Verbindungsgeraden von zwei Schnittpunkten des Kegelschnittes mit den zwei festen Geraden erhält man noch zwei unabhängige analoge Relationen.

Auf andere Spezialfälle von $a_x^n=0$ will ich nicht mehr eingehen, sondern gleich Anwendungen der aufgestellten Theoreme auf dem Gebiete der Geometrie geben.

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der aufgestellten Theoreme auf die Theorie der ebenen Kurven.

Carnot und Salmon haben einige Anwendungen des Carnotschen Satzes gegeben. Bezüglich derselben verweise ich auf: Carnot, Geometrie der Stellung, 2. Bd., pag. 41 und 42, ferner Salmon, Geometrie der Kegelschnitte, pag. 445—447, und Salmon, Geometrie der ebenen Kurven (2. Aufl.), pag. 140. Die Anwendungen, die ich geben will, liefern zum großen Teil sehr bekannte Sätze der Geometrie, doch habe ich sie nirgends nach meiner Beweismethode entwickelt gefunden.

Wie ich schon pag. 13 erwähnte, läßt sich der Carnotsche Satz in der von mir gegebenen Form direkt dual übertragen. Man könnte diese Übertragung folgendermaßen formulieren:

In der Ebene sind n feste Punkte gegeben $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}\cdots\xi^{(n)}$; sie mögen in dieser Anordnung zu einem n-Seit verbunden werden, dessen Seiten $g^{(1,2)}, g^{(2,3)}\cdots g^{(n,1)}$ heißen; $g^{(\nu,\nu+1)}$ ist die Verbindungsgrade von den Punkten $\xi^{(\nu)}$ und $\xi^{(\nu+1)}$. Es liege in der Ebene noch eine Kurve m^{ter} Klasse; an diese lege man von den n Punkten $\xi^{(\nu)}$ die $n$mal je m Tangenten, welche mit $t^{(\mu,\nu)}$ bezeichnet werden mögen $\mu=1,2\cdots m$, $\nu=1,2\cdots n$ ($t^{(\mu,\nu)}$ ist die μ^{te} Tangente vom Punkte $\xi^{(\nu)}$). Dann besteht folgende Relation:

$$\prod_{1}^{m}{}_{\mu}\prod_{1}^{n}{}_{\nu}\frac{\sin\left(t^{(\mu,\nu)}g^{(\nu-1,\nu)}\right)}{\sin\left(t^{(\mu,\nu)}g^{(\nu,\nu+1)}\right)}=(-1)^{m\cdot n}.$$

Louis Ravier führt in den Nouvelles Annales de Math. Serie III, 11, pag. 350 einen Satz auf, den er bezeichnet als Theorème analogue à celui de Carnot ou généralisation du theorème de Jean de Céva:

Si de chacun des sommets d'un polygone quelconque on mène toutes les tangentes possibles à une courbe algébrique, et si l'on prend leurs points de rencontre avec les côtés du polygone ne passant pas par ce sommet, si l'on forme ensuite le produit en grandeur et en signe des distances des points d'intersection sur le premier côté au premier sommet, puis de ceux sur le second au second sommet, et ainsi de suite; si l'on recommence ensuite en sens inverse, on obtient deux produits toujours égaux en valeur absolue et qui sont de signes contraires si le nombre des côtés du polygone et la classe de la courbe sont tous deux des nombres impairs.

Dieser Satz läßt sich durch das Carnotsche Theorem und das duale mit Zuhilfenahme des Zusatzes pag. 16 leicht beweisen, wobei sich die Raviersche Vorzeichenregel als mit der meinigen, soviel ich weiß, auch der gewöhnlich gebräuchlichen, nicht im Einklang stehend ergibt. (Ravier nimmt das Vorzeichen eines Abstandsverhältnisses eines innerhalb zweier Grundpunkte liegenden Punktes negativ, während ich es positiv wählte.)

Es sei das Polygon ein n-Eck, die Kurve von der m^{ten} Klasse. Man bilde für jede der $m \cdot n$ Tangenten die Carnotsche Relation für das n-Eck mit Berücksichtigung des Zusatzes pag. 16, da jede Tangente durch einen Eckpunkt des n-Ecks geht. Das Produkt der linken Seiten dieser $m \cdot n$ Relationen enthält dann außer den Sinusverhältnissen der Ravierschen Abschnitte noch die m^{ten} Potenzen der Seiten des n-Ecks, jedoch jede Seite sowohl im Nenner wie im Zähler in der genannten Potenz, und noch die Sinusverhältnisse der Winkel, welche in dem zum Carnotschen Satze dualen auftreten. Die Seiten heben sich direkt heraus und für das Produkt der Sinusverhältnisse genannter Winkel kann man nach Satz pag. 16 $(-1)^{m \cdot n}$ setzen. Das Produkt der rechten Seiten der für die $m \cdot n$ Tangenten gebildeten Carnotschen Relationen gibt ebenfalls $(-1)^{m \cdot n}$, so daß unsere Schlußgleichung erhalten wird durch beiderseitige Division mit $(-1)^{m \cdot n}$. Ersetzt man die Sinusverhältnisse von Strecken durch die Streckenverhältnisse selbst, so hat man für die Euklidsche Geometrie den Ravierschen Satz, jedoch mit der Bestimmung, daß bei der von mir eingehaltenen Vorzeichenwahl von Streckenverhältnissen stets das Vorzeichen plus zu nehmen ist.

Für die Winkelsumme im Dreieck bei einer speziellen Maßbestimmung, bei welcher der Fundamentalkegelschnitt in zwei reelle oder imaginäre Punkte zerfällt, läßt sich durch den zum Carnotschen Satz dualen beweisen, daß sie nur ein Vielfaches von π und zwar nur ein ungerades sein kann, wenn die Konstante der Maßbestimmung nach Cayley den Wert $-\frac{\sqrt{-1}}{2}$ hat.

Das Dreieck habe die Ecken $A, B, C,$ die Seiten a, b, c und die Winkel $(ab), (bc), (ca)$. Von den drei Ecken A, B, C gehen nach dem einen der beiden Punkte, in welche der Fundamentalkegelschnitt zerfallen ist, die drei Geraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Nach dem zum Carnotschen Satze dualen hat man:

$$\frac{\sin(\mathfrak{a}b)\ \sin(\mathfrak{b}c)\ \sin(\mathfrak{c}a)}{\sin(\mathfrak{a}c)\ \sin(\mathfrak{b}a)\ \sin(\mathfrak{c}b)} = -1.$$

Nun ist aber:

$$(\mathfrak{a}b) = (\mathfrak{a}c) + (cb)$$
$$(\mathfrak{b}c) = (\mathfrak{b}a) + (ac)$$
$$(\mathfrak{c}a) = (\mathfrak{c}b) + (ba).$$

Also:

$$\frac{\sin(\mathfrak{a}b)}{\sin(\mathfrak{a}c)} = \cos(cb) + \operatorname{cotg}(\mathfrak{a}c)\sin(cb).$$

Ferner ist:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{-1}\,\frac{\delta+1}{\delta-1},$$

wenn δ das Doppelverhältnis der beiden Schenkel des Winkels α zu den beiden Strahlen nach den Fundamentalpunkten bedeutet.

δ ist nun für $(\mathfrak{a}c)$ entweder null oder unendlich, je nachdem man den einen oder den andern der beiden Fundamentalpunkte zum ersten Grundpunkte wählt. Wählt man $\delta = 0$, so erhält man:

$$\frac{\sin(\mathfrak{a}b)}{\sin(\mathfrak{a}c)} = \cos(cb) - \sqrt{-1}\sin(cb).$$

Analog für die übrigen zwei Quotienten:

$$\frac{\sin(\mathfrak{b}c)}{\sin(\mathfrak{b}a)} = \cos(ac) - \sqrt{-1}\sin(ac);$$

$$\frac{\sin(\mathfrak{c}a)}{\sin(\mathfrak{c}b)} = \cos(ba) - \sqrt{-1}\sin(ba).$$

Man hat also:

$$\cos[(cb) + (ba) + (ac)] - i\sin[(cb) + (ba) + (ac)] = -1.$$

Da nun die Winkel durch Wahl der Maßkonstanten $\left(-\frac{i}{2}\right)$ reell sind, folgt:

$$(cb) + (ba) + (ac) = (2h+1)\,\pi. \quad h = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Dasselbe hätte man erhalten, wenn man δ nicht gleich 0, sondern unendlich gewählt hätte.

Vermöge der aufgestellten Theoreme läßt sich folgender allgemeiner Satz ableiten:

Auf einer in Gerade oder Kegelschnitte oder auch in Gerade und einen Kegelschnitt zerfallenden Kurve N^{ter} Ordnung seien $\left(Nm - \frac{1}{2}(N-2)(N+1)\right)$ Punkte gegeben, wobei $m \geq (N-1)$;

alle Kurven m^{ter} Ordnung durch diese Punkte schneiden dann die Kurve N^{ter} Ordnung in noch je $\frac{1}{2}(N-2)(N+1)$ Punkten, welche mit $p = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ festen Punkten des Kurvensystems N^{ter} Ordnung auf einer Kurve der $(N-2)^{\text{ten}}$ Ordnung liegen.

Beweis: φ und ψ seien zwei Kurven, welche durch die festen $\left(N \cdot m - \frac{1}{2}(N-2)(N+1)\right)$ Punkte gehen. Sowohl nach dem Carnotschen wie nach dem Kegelschnitttheorem gilt dann:

$$\prod_{\nu}\prod_{\mu}\left(\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_{\varphi} = \prod_{\nu}\prod_{\mu}\left(\frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}}\right)_{\psi}.$$

Von den Gliedern der beiden Doppelprodukte lassen sich alle streichen mit Ausnahme von den $\frac{1}{2}(N-2)(N+1)$, welche den Punkten entsprechen, die den Kurven φ und ψ nicht gemeinsam sind. Durch diese $\frac{1}{2}(N-2)(N+1)$ Punkte von φ wie von ψ ist je eine Kurve $(N-2)^{\text{ter}}$ Ordnung vollständig bestimmt. Man multipliziere nun die beiden Seiten obiger, gekürzt gedachter Relation mit den $\frac{x_2}{x_1}$, die den $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ weiteren Schnittpunkten der der Kurve φ zugehörigen Kurve $(N-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Grundkurve entsprechen. Dann hat die linke Seite der erhaltenen Gleichung den Wert $(-1)^{N\,(N-2)}$ bezw. C^{N-2}, da eben dann links die einem vollständigen Schnittpunktsystem der Grundkurve N^{ter} Ordnung mit einer Kurve $(N-2)^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechenden Glieder stehen. Also hat auch die rechte Seite den Wert $(-1)^{N\cdot(N-2)}$ bezw. C^{N-2}. Daraus wird aber geschlossen, daß die zweite Kurve $(N-2)^{\text{ter}}$ Ordnung die Punkte enthält, welche die erste auf dem Grundkurvensystem außer den $\frac{1}{2}(N-2)(N+1)$ variablen Punkten von φ ausschneidet.

Der Beweis für die Fälle I b und III ist durch durch diesen Beweis klar gelegt.

Es lassen sich von diesem Theorem eine große Zahl von Anwendungen machen. Einige mögen hier Platz finden.

Sind von den Schnittpunkten einer Kurve m^{ter} Ordnung mit drei Geraden alle bis auf einen gegeben, so läßt sich dieser stets linear konstruieren:

Denn: für $m = 2$ ergibt sich die Pascalsche Konstruktion. Liegen auf der ersten Geraden die beiden Punkte P_{11} und P_{12}, auf der zweiten P_{21} und P_{22}, auf der dritten der Punkt P_{31}, so schneiden alle Kegelschnitte durch die vier Punkte P_{11}, P_{12}, P_{21} und P_{31} die drei Geraden in noch zwei weiteren variablen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt auf der ersten Geraden geht. Diesen Punkt er-

hält man, indem man durch die eben angeführten vier Punkte einen in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitt legt und die neuen Schnittpunkte dieser zwei Geraden mit der zweiten und dritten Grundgeraden verbindet; der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der ersten Fundamentalgeraden ist der gesuchte feste Punkt. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit Punkt P_{22} liefert auf der dritten Grundgeraden den sechsten Kurvenpunkt P_{32}.

Für $m = 3$ ergibt sich folgende Konstruktion: P_{11}, P_{12}, P_{13}; P_{21}, P_{22}, P_{23}; P_{31}, P_{32} seien acht Punkte der Kurve dritter Ordnung auf drei Geraden, und auf denselben so verteilt, wie sie die Indices wohl klar genug ordnen. Durch die sieben Punkte P_{11}, P_{12}, P_{13}; P_{21}, P_{22}; P_{31} und P_{32} lege man eine beliebige Kurve dritter Ordnung, und zwar behufs Ermöglichung der Konstruktion von Schnittpunkten mit den drei Geraden eine in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfallende, z. B. durch $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ und P_{31} einen Kegelschnitt, durch P_{13} und P_{32} eine Gerade; diese zwei Hilfskurven schneiden die dritte bezw. die zweite Gerade in noch je einem Punkte, deren Verbindungsgerade auf der ersten Geraden wieder einen festen Punkt ausschneidet. Die Verbindungslinie dieses letzteren mit P_{23} schneidet auf der dritten Fundamentalgeraden einen neunten Punkt P_{33} der Kurve dritter Ordnung aus.

Man sieht schon, wie die Konstruktion für beliebiges m geschieht:

Sind auf der ersten Geraden die Punkte $P_{11}, P_{12} \ldots P_{1m}$, auf der zweiten $P_{21}, P_{22} \ldots P_{2m}$ und auf der dritten $P_{31}, P_{32} \ldots P_{3,m-1}$ gegeben, so lege man durch die Punkte $P_{11}, P_{12} \ldots P_{1,m-1}$, $P_{21}, P_{22} \ldots P_{2,m-1}$ und $P_{31}, P_{32} \ldots P_{3,m-2}$ eine Kurve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche auf der dritten Geraden einen Punkt P_3 ausschneidet, durch $P_{1,m}$ und $P_{3,m-1}$ lege man eine Gerade, welche auf der zweiten Fundamentalgeraden einen Punkt P_2 ausschneidet. Die Verbindungsgerade von P_2 mit P_3 trifft die erste feste Gerade in einem Punkte P_1. Die Verbindungslinie von P_1 mit P_{2m} schneidet auf der dritten Fundamentalgeraden den gesuchten letzten Punkt P_{3m} der Kurve m^{ter} Ordnung aus. Man sieht also, daß die Aufgabe, die für eine Kurve m^{ter} Ordnung gegeben war, auf eine analoge für eine Kurve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeht, schließlich also auf den Fall $m = 2$, der linear durch den eben wieder bewiesenen Pascalschen Satz erledigt wird.

Ganz ähnliche Lösung findet die Aufgabe: Auf einem Kegelschnitt und einer Geraden sind $(3m-1)$ Punkte einer Kurve m^{ter} Ordnung gegeben; den letzten Schnittpunkt derselben, der auf dem Kegelschnitt oder auf der Geraden liegt, linear zu konstruieren. Wegen vollkommener Analogie der Behandlung mit der vorhergehenden Konstruktion will ich nicht darauf eingehen, sondern für den Fall $N = 4$ eine Anwendung geben, welche lehrt, eine Kurve dritter Ordnung punktweise aus neun gegebenen zu konstruieren:

Durch fünf der neun Punkte lege man einen Kegelschnitt, etwa durch P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5, durch die zwei Punkte P_{11}, P_{12} eine Gerade, durch die übrigen beiden Punkte P_{21}, P_{22} lege man eine zweite Gerade. Alle Kurven dritter Ordnung, welche nun durch die $7 = \left(Nm - \frac{1}{2}(N-2)(N+1)\right)$ Punkte P_1, P_2, P_3, P_{11}, P_{12}, P_{21} und P_{22} gehen, schneiden den festen Kegelschnitt und die Geraden in noch fünf Punkten eines Kegelschnittes, der durch drei feste Punkte auf der zerfallenden Grundkurve vierter Ordnung geht. Man erhält also folgende Konstruktion, indem man eine in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallende Kurve dritter Ordnung einführt.

Durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_{11} und P_{21} lege man einen Kegelschnitt, der den Fundamentalkegelschnitt in einem weiteren Punkte P', die erste Gerade in einem Punkte P'_{I}, die zweite in einem Punkte P'_{II} schneidet. Durch die zwei Punkte P_{21} und P_{22} lege man eine Gerade, welche den Grundkegelschnitt in zwei Punkten P'' und P''' schneidet. Der Kegelschnitt durch die fünf Punkte P', P'', P''', P'_{I} und P'_{II} trifft den Grundkegelschnitt in einem Punkte P, die erste Fundamentalgerade in einem weiteren Punkte P_{I} und die zweite in einem Punkte P_{II}. P, P_{I} und P_{II} sind jene festen Punkte in der vorausgeschickten Erklärung. Durch diese drei und durch die zwei Punkte P_4 und P_5 lege man nun einen weiteren Kegelschnitt, welcher den Grundkegelschnitt noch in einem Punkte P_6, die erste Grundgerade noch in einem Punkte P_{13}, und die zweite in einem Punkte P_{23} schneidet und diese letzteren drei Punkte sind Punkte der Kurve dritter Ordnung, so daß man jetzt von derselben sechs Punkte auf einem Kegelschnitt, und je drei auf zwei Geraden kennt. Die Konstruktion weiterer Punkte kann man dann mit Hilfe der vorhergehenden Methode am einfachsten leisten. (Wie man sieht, sind alle vorkommenden Hilfskonstruktionen linear mit Ausnahme der Konstruktion der beiden Punkte P'' und P''', welche quadratisch ist.)

Nun will ich eine Anwendung des Büscheltheorems für die Euklidsche Geometrie geben.

Nach S. 20 hat man für $n = 3$:

$$\left(\frac{1}{\sin\gamma_{21}\sin\gamma_{31}}\sum_1^m{}^{\mu}\frac{1}{l_{\mu,1}} + \frac{1}{\sin\gamma_{12}\sin\gamma_{32}}\sum_1^m{}^{\mu}\frac{1}{l_{\mu,2}} + \frac{1}{\sin\gamma_{13}\sin\gamma_{23}}\sum_1^m{}^{\mu}\frac{1}{l_{\mu,3}}\right)_\varphi = 0$$

oder durch Multiplikation der ganzen Gleichung mit $\sin\gamma_{12}\cdot\sin\gamma_{23}\cdot\sin\gamma_{13}$:

$$\sin\gamma_{23}\sum_1^m{}^{\mu}\left(\frac{1}{l_{\mu,1}}\right)_\varphi + \sin\gamma_{31}\sum_1^m{}^{\mu}\left(\frac{1}{l_{\mu,2}}\right)_\varphi + \sin\gamma_{12}\sum_1^m{}^{\mu}\left(\frac{1}{l_{\mu,3}}\right)_\varphi = 0.$$

Bestimmt man nun auf der ersten der drei Geraden einen Punkt, so daß $\frac{1}{\mathfrak{l}_1} = k \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,1}}\right)_\varphi$ auf der zweiten einen Punkt, so daß sein $\frac{1}{\mathfrak{l}_2} = k \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,2}}\right)_\varphi$, und auf der dritten einen Punkt, dessen $\frac{1}{\mathfrak{l}_3} = k \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,3}}\right)_\varphi$ ist, so liegen diese drei Punkte auf einer Geraden; denn man hat:

$$\sin \gamma_{23} \frac{1}{k\mathfrak{l}_1} + \sin \gamma_{31} \frac{1}{k\mathfrak{l}_2} + \sin \gamma_{12} \frac{1}{k\mathfrak{l}_3} = 0;$$

durch Multiplikation mit k erhält man die Relation, welche aussagt, daß die drei Punkte, denen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_3$ angehören, auf einer Geraden liegen.

Hält man nun von den drei Strahlen zwei fest und läßt den dritten Strahl sich um seinen Scheitel drehen und sucht in jeder Lage den Punkt, dessen $\frac{1}{\mathfrak{l}} = k \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{l}_\mu}\right)_\varphi$ ist, so liegt dieser immer auf einer Geraden mit den zwei festen Punkten auf den zwei festen Geraden, deren $\frac{1}{\mathfrak{l}_1} = k \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,1}}\right)_\varphi$ und $\frac{1}{\mathfrak{l}_2} = k \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,2}}\right)_\varphi$ ist. Für $k = \frac{1}{m}$ erhält man den Satz von Cotes, enthalten in Salmon, ebene Kurven, pag. 146.

Allgemeiner läßt sich mit Hilfe des Büscheltheorems folgender Satz aussprechen:

Legt man durch einen festen Punkt eine beliebige Gerade, welche eine algebraische Kurve $\varphi_x^m = 0$ in m Punkten mit den von dem festen Punkte aus gerechneten Vektorenlängen $\mathfrak{l}_\mu$ schneidet, und bestimmt $(n-2)$ andere Punkte auf der Geraden derart, daß für die diesen zugehörigen Vektorenlängen $\mathfrak{l}_i'$ die Beziehungen bestehen:

$$k_s \cdot \sum_1^{n-2}{}^{i} \frac{1}{\mathfrak{l}_i'^s} = \sum_1^m{}^{\mu} \frac{1}{\mathfrak{l}_\mu^s}, \quad (s = 1, 2, \ldots, (n-2)),$$

wobei k_s ganz beliebige Konstante bedeuten, so ist der Ort aller dieser Punkte eine Kurve von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Beweis: Man lege durch den festen Punkt n beliebige Gerade, deren Schnittpunkte mit $\varphi_x^m = 0$ zu den Büschelrelationen führen:

$$\sum_1^{n+3}{}^{\nu'} \frac{1}{\prod_1^{n+3}{}_j \prod^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,\nu'}}\right)_\varphi^{n+1} = 0.$$

Nun ist gemacht worden:

$$\sum_1^m{}_\mu \left(\frac{1}{l_\mu}\right)_\varphi^s = k_s \cdot \sum_1^{n-2}{}_i \left(\frac{1}{l_i'}\right)^s;$$

also:

$$\sum_1^{n+3}{}_\nu' \frac{1}{\prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} \sum_1^{n-2}{}_i \left(\frac{1}{l_i'}\right)^{n+1} = 0.$$

Dieser Gleichungen bestehen im ganzen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und es müssen also die $n \cdot (n-2)$ Punkte auf einer Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

Diese Kurve ist aber auch schon durch $(n-1)(n-2)$ dieser Punkte auf $(n-1)$ Geraden vollständig bestimmt; dreht man nämlich die letzte der n Geraden und bestimmt wieder die $(n-2)$ Punkte oben besprochener Eigenschaft, so liegen diese mit den $(n-1)(n-2)$ vorigen Punkten wieder auf einer Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die mit der ersteren identisch sein muß, da zwei Kurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung nur $(n-2)^2$ gemeinsame Punkte haben können, es sei denn, die beiden Kurven fallen zusammen.

Noch eine andere Anwendung des Büscheltheorems:

In der Ebene sei eine Kurve m^{ter} Ordnung und ein Punkt gegeben. Legt man durch diesen irgend eine Gerade, welche auf der Kurve m Punkte mit der Vektorenlänge l_μ ausschneidet, und bestimmt die m Punkte, deren Vektorenlängen zu den vorigen im Verhältnis $k:1$ stehen, so liegen alle diese Punkte, welche man bei Drehung der Geraden um den festen Punkt erhält, wieder auf einer Kurve m^{ter} Ordnung, welche zur ursprünglichen ähnlich genannt wird. Der feste Scheitel der Geraden heißt das Ähnlichkeitszentrum.

Der Beweis ist sehr einfach.

Man lege durch den festen Punkt n Gerade, wobei $n > (m+1)$, etwa $n = m+2$. Für das Schnittpunktsystem dieser n Geraden mit der gegebenen Kurve $\varphi_x^m = 0$ hat man dann $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Relationen von der Form:

$$\sum_1^{n+3}{}_\nu' \frac{1}{\prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{1}{l_{\mu,\nu'}}\right)_\varphi^{n+1} = 0.$$

Durch Division mit k^{n+1} erhält man:

$$\sum_1^{n+3}{}_\nu' \frac{1}{\prod_1^{n+3}{}_j^{(\nu')} \sin \gamma_{j,\nu'}} \sum_1^m{}_\mu \left(\frac{1}{k l_{\mu,\nu'}}\right)^{n+1} = 0.$$

Dies aber sagt aus, daß die Punkte mit den Vektoren $k \cdot \mathfrak{l}_{\mu,\nu'}$ auf einer Kurve m^{ter} Ordnung liegen. Dreht man nun den n^{ten} Strahl und bestimmt auf ihm auch wieder die Punkte $k$facher Vektorenlänge, so erhält man, daß diese neuen m Punkte mit den $(m+1)$ m alten Punkten wieder auf einer Kurve m^{ter} Ordnung liegen, und diese muß identisch mit der vorigen sein, da zwei verschiedene Kurven dieser Ordnung höchstens m^2 Punkte miteinander gemeinsam haben können.

Endlich will ich noch mit Hilfe des Büscheltheoremes den Krümmungsradius einer Kurve beliebiger Ordnung berechnen, wenn die sämtlichen Schnittpunkte von drei durch den Kurvenpunkt, für welchen der Krümmungsradius zu bestimmen ist, gehenden Geraden mit der Kurve $\varphi_x^m = 0$ und die Tangente an jenem Punkte ohne ihre weiteren Schnittpunkte gegeben sind.

Für das Schnittpunktsystem der drei Geraden mit $\varphi_x^m = 0$ hat man nach pag. 36;

$$\sin\gamma_{23}\sum_1^m{}^{\mu}\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,1}}\right)_{\varphi} + \sin\gamma_{31}\sum_1^m{}^{\mu}\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,2}}\right)_{\varphi} + \sin\gamma_{12}\sum_1^m{}^{\mu}\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu,3}}\right)_{\varphi} = 0;$$

für das Schnittsystem des Krümmungskreises im Scheitel der drei Geraden mit diesen hat man:

$$\sin\gamma_{23}\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{1,1}} + \frac{1}{s_1}\right) + \sin\gamma_{31}\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{1,2}} + \frac{1}{s_2}\right) + \sin\gamma_{12}\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{1,3}} + \frac{1}{s_3}\right) = 0.$$

(Der Krümmungskreis schneidet dieselben dem Scheitel der drei Geraden unendlich benachbarten Punkte mit den Längen $\mathfrak{l}_{1,1}$, $\mathfrak{l}_{1,2}$ und $\mathfrak{l}_{1,3}$ aus, ferner noch die Sehnen s_1, s_2 und s_3).

Durch Gleichsetzung der linken Seiten dieser zwei Gleichungen hat man:

$$\sin\gamma_{23}\cdot\frac{1}{s_1} + \sin\gamma_{31}\cdot\frac{1}{s_2} + \sin\gamma_{12}\frac{1}{s_3}$$

$$= \sin\gamma_{23}\sum_2^m{}'^{\mu}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',1}} + \sin\gamma_{31}\sum_2^m{}'^{\mu}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',2}} + \sin\gamma_{12}\sum_2^m{}'^{\mu}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',3}}.$$

Nun ist aber:

$$s_1 = 2\varrho\sin(g^{(1)}t),$$
$$s_2 = 2\varrho\sin(g^{(2)}t),$$
$$s_3 = 2\varrho\sin(g^{(3)}t),$$

wobei $(g^{(1)}t)$ den Winkel der ersten Geraden gegen die Tangente und analog $(g^{(2)}t)$ und $(g^{(3)}t)$ bedeutet. Also:

$$2\varrho = \frac{\dfrac{\sin\gamma_{23}}{\sin(g^{(1)}t)} + \dfrac{\sin\gamma_{31}}{\sin(g^{(2)}t)} + \dfrac{\sin\gamma_{12}}{\sin(g^{(3)}t)}}{\sin\gamma_{23}\displaystyle\sum_2^m{}'^{\mu}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',1}} + \sin\gamma_{31}\sum_2^m{}'^{\mu}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',2}} + \sin\gamma_{12}\sum_2^m{}'^{\mu}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',3}}}.$$

(Die $\mathfrak{l}_{\mu',i}$ bedeuten die Segmente oder Vektoren vom Scheitel der drei Geraden i. e. vom Kurvenpunkte, dessen Krümmung zu bestimmen.) Man sieht, daß alle Kurven m^{ter} Ordnung durch die gegebenen Punkte und mit derselben Tangente im Scheitel der drei Geraden ein und denselben Krümmungskreis in diesem haben. Zugleich erkennt man, daß eine Inflexion dann auftritt, wenn die $3(m-1)$ Schnittpunkte der drei Geraden mit $\varphi_x^m = 0$ in einer Kurve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, da dann gemäß dem Büscheltheorem der Nenner unseres Bruches verschwindet.

Mit Hilfe der identischen Relation:

$$\sin\gamma_{23}\sin(g^{(1)}t) + \sin\gamma_{31}\sin(g^{(2)}t) + \sin\gamma_{12}\sin(g^{(3)}t) = 0,$$

welche man erhält, wenn man die Büschelrelation für den Schnitt der drei Geraden $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ und $g^{(3)}$ mit der Tangente t durch Grenzübergang bildet, läßt sich der Zähler unschwer auf die Form bringen:

$$\frac{\sin\gamma_{23}\cdot\sin\gamma_{31}\cdot\sin\gamma_{12}}{\sin(g^{(1)}t)\cdot\sin(g^{(2)}t)\cdot\sin(g^{(3)}t)}.$$

Dann hat man für $m=2$ genau die Formel, welche Fouret in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences, B. 110, b, pag. 779 (2) aufgestellt hat. Diese Formel läßt sich also für Kurven m^{ter} Ordnung folgendermaßen schreiben:

$$2\varrho = \frac{\sin\gamma_{23}\cdot\sin\gamma_{31}\cdot\sin\gamma_{12}\cdot\left(\sin(g^{(1)}t)\cdot\sin(g^{(2)}t)\cdot\sin(g^{(3)}t)\right)^{-1}}{\sin\gamma_{23}\sum_{2}^{m}{}'_{\mu'}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',1}} + \sin\gamma_{31}\sum_{2}^{m}{}'_{\mu'}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',2}} + \sin\gamma_{12}\sum_{2}^{m}{}'_{\mu'}\frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',3}}}.$$

Nun kann man durch $(3m-4)$ der Punkte mit den Vektorenlängen $\mathfrak{l}_{\mu',i}$ eine Kurve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, welche noch einen Punkt ausschneidet. Man lege z. B. die Kurve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch alle Punkte mit Ausnahme von dem, welcher den Vektor $\mathfrak{l}_{m,3}$ hat; sie schneidet auf $g^{(3)}$ noch einen Punkt aus; seine Vektorenlänge sei $\mathfrak{l}_3$. Dann läßt sich der Nenner obigen Ausdruckes ersetzen durch: $\sin\gamma_{12}\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{m,3}} - \frac{1}{\mathfrak{l}_3}\right)$, wie aus dem Büscheltheorem ersichtlich ist wegen des Bestehens der zum Schnittsystem der drei Geraden mit der Hilfskurve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehörigen Relation. Unsere Formel wird also:

$$2\varrho = \frac{\sin\gamma_{23}\cdot\sin\gamma_{31}}{\sin(g^{(1)}t)\sin(g^{(2)}t)\sin(g^{(3)}t)\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_{m,3}} - \frac{1}{\mathfrak{l}_3}\right)}.$$

Dies ist für $m=2$ genau die von Fouret als erste für den Krümmungsradius aufgestellte Formel.

Während Fouret auf diese und die vorhergehende Formel seine Konstruktionsmethoden des Krümmungsradius eines Kegelschnittes stützt, will ich die Grundformel pag. 39 zu Konstruktionen benützen, die den Fouretschen an Einfachheit, wie auch den von Mannheim in dem Bulletin de la société de mathématique, tome 18, pag. 155—58, kaum nachstehen.

Man lege an die gegebene Tangente im Kurvenberührungspunkte einen berührenden Kreis mit beliebigem Radius r. Derselbe schneidet $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ und $g^{(3)}$ in den Punkten mit Vektorenlängen l_1, l_2 und l_3. Dann ist:

$$2r \sin (g^{(i)} t) = l_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Die Formel von pag. 39 geht also über in:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\sin \gamma_{23} \frac{1}{l_1} + \sin \gamma_{31} \frac{1}{l_2} + \sin \gamma_{12} \frac{1}{l_3}}{\sin \gamma_{23} \sum_2^m{}^{\mu'} \frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',1}} + \sin \gamma_{31} \sum_2^m{}^{\mu'} \frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',2}} + \sin \gamma_{12} \sum_2^m{}^{\mu'} \frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',3}}}.$$

Man lege nun durch die Punkte mit den Vektoren l_1 und l_2 eine Gerade, welche auf $g^{(3)}$ einen Punkt mit dem Vektor l_3' ausschneidet; durch die Punkte mit den Vektoren $\mathfrak{l}_{\mu',1}$ $\mathfrak{l}_{\mu',2}$ und $\mathfrak{l}_{\mu',3}$ mit Ausnahme von $\mathfrak{l}_{m,3}$ eine Kurve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche auf $g^{(3)}$ noch einen Punkt mit dem Vektor $\mathfrak{l}_3'$ ausschneidet. Mit Benützung des Büscheltheoremes hat man dann:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\frac{1}{l_3} - \frac{1}{l_3'}}{\frac{1}{\mathfrak{l}_{m,3}} - \frac{1}{\mathfrak{l}_3'}};$$

Daraus ergibt sich von selbst eine Konstruktion des Krümmungsradius. Eleganter erhält man auf folgendem Wege eine solche:

Durch die $3(m-1)$ Punkte mit den Vektoren $\mathfrak{l}_{\mu',i}$ $(\mu' = 2, 3, \cdots, m;$ $i = 1, 2, 3)$ und durch die unendlich fernen Punkte von $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$ lege man eine Kurve m^{ter} Ordnung, welche auf $g^{(3)}$ noch einen Punkt mit dem Vektor $\mathfrak{l}$ ausschneidet, der stets linear konstruierbar ist; durch die drei Punkte mit den Vektoren l_1, l_2 und l_3 und durch die beiden unendlich fernen Punkte von $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$ lege man eine Hyperbel, welche auf $g^{(3)}$ noch einen Punkt mit dem Vektor l ausschneidet. Dann ist mit zweimaliger Benützung des Büscheltheoremes:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\mathfrak{l}}{l};$$

Dies ergibt für $m = 2$ folgende Konstruktion: Die gegebene Tangente sei t, der Berührungspunkt auf derselben m; drei andere Punkte des Kegelschnittes seien a_{11}, a_{12} und a_{13}.

Man verbinde diese drei Punkte mit m durch die drei Geraden $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ und $g^{(3)}$; a_{11} verbinde man mit a_{13}; diese Verbindungslinie schneidet $g^{(2)}$ in einem Punkte $a_{2,2}$; durch diesen Punkt ziehe man die Parallele zu $g^{(3)}$, welche $g^{(1)}$ in einem Punkte a_{21} trifft; die Verbindungslinie dieses Punktes mit a_{12} trifft $g^{(3)}$ in einem Punkte a_{23}.

Nun errichte man in m die Normale zu t und lege um einen Punkt derselben, er heiße o, einen Kreis, der t im Punkte m berührt und auf den drei Geraden $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ und $g^{(3)}$ bezw. die Punkte b_{11}, b_{12} und b_{13} ausschneidet. Für diese mache man dieselbe Konstruktion, wie für die a_{11}, a_{12} und a_{13}; also: b_{11} verbinde man mit b_{13}; diese Verbindungslinie trifft $g^{(2)}$ in einem Punkte $b_{2,2}$; durch diesen ziehe man eine Parallele zu $g^{(3)}$, welche $g^{(1)}$ in einem Punkte b_{21} schneidet; die Verbindungslinie dieses Punktes mit b_{12} trifft $g^{(3)}$ in einem Punkte b_{23}.

Jetzt verbinde man b_{23} mit o, lege dazu eine Parallele durch a_{23}, so schneidet diese die Normale im Krümmungsmittelpunkt O.

Wie sich die Konstruktion für $m > 2$ gestaltet, dürfte aus dem Besprochenen hinlänglich klar sein; im übrigen lassen sich eine Unzahl Modifikationen machen.

Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß für die Lamésche Kurve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m \pm \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

der Satz von M. Jamet, wie ihn Fouret in Compt. rendus, 110 b, pag. 844 zitiert, leicht nachweisbar ist, indem man die Ausdrücke $\sum_2^m{}' \frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',i}}$, welche sich leicht aufstellen lassen, betrachtet. Auch für die allgemeinen triangulären Kurven wird sich der Jametsche Satz durch Aufstellung der Ausdrücke $\sum_2^m{}^{\mu} \frac{1}{\mathfrak{l}_{\mu',i}}$ beweisen lassen.

Der Vollständigkeit halber möge der Krümmungsradius einer algebraischen Kurve m^{ter} Ordnung auch noch durch das Carnotsche Theorem berechnet werden.

In einem Punkte von $\varphi_x^m = 0$ sei die Tangente mit ihren sämtlichen Schnittpunkten mit φ gegeben, ferner die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden durch den Berührungspunkt mit φ und endlich noch die Schnittpunkte einer beliebigen dritten Geraden mit φ.

Man hat:

$$\prod_1^3{}_{\nu} \prod_1^m{}_{\mu} \frac{x_2^{(\mu,\nu)}}{x_1^{(\mu,\nu)}} = (-1)^{3 \cdot m}.$$

Der Tangente möge der Index $\nu = 3$, der Geraden durch den Berührungspunkt $\nu = 2$ und der anderen Geraden $\nu = 1$ entsprechen.

Das Doppelprodukt läßt sich nun zerlegen in:

$$\prod_1^m{}_{\mu} \frac{x_2^{(\mu,1)}}{x_1^{(\mu,1)}} \cdot \prod_2^m{}_{\mu'} \frac{x_2^{(\mu',2)}}{x_1^{(\mu',2)}} \cdot \frac{x_2^{(1,2)}}{x_1^{(1,2)}} \cdot \frac{x_2^{(1,3)^2}}{x_1^{(1,3)} x_1^{(2,3)}} \cdot \prod_3^m{}_{\mu''} \frac{x_2^{(\mu'',3)}}{x_1^{(\mu'',3)}} = (-1)^{3m}.$$

$x_2^{(1,3)}$ und $x_1^{(1,2)}$ sind beide verschwindende Größen. Nach Zusatz pag. 17 hat man nun:

$$\prod_1^m{}_{\mu} \frac{x_2^{(\mu,1)}}{x_1^{(\mu,1)}} \cdot \prod_2^m{}_{\mu'} \frac{x_2^{(\mu',2)}}{x_1^{(\mu',2)}} \cdot \prod_3^m{}_{\mu''} \frac{x_2^{(\mu'',3)}}{x_1^{(\mu'',3)}} \cdot 2\varrho \sin(g^{(2)} g^{(3)}) \cdot \frac{s}{t^2} = (-1)^{3m}.$$

Hierbei wurde mit s die Strecke auf der zweiten Geraden zwischen der ersten und dritten, mit t die Strecke auf der Tangente, also der dritten Geraden zwischen der zweiten und ersten bezeichnet. Also:

$$2\varrho = (-1)^{3m} \cdot \frac{t^2}{s \sin(g^{(2)} g^{(3)})} \cdot \prod_1^m{}_{\mu} \frac{x_1^{(\mu,1)}}{x_2^{(\mu,1)}} \cdot \prod_2^m{}_{\mu'} \frac{x_1^{(\mu',2)}}{x_2^{(\mu',2)}} \cdot \prod_3^m{}_{\mu''} \frac{x_1^{(\mu'',3)}}{x_2^{(\mu'',3)}}$$

($m = 2$ siehe Salmon, Theorie der Kegelschnitte pag. 446.) Es ist klar, daß durch Einführung geeigneter Transversalen dieser Ausdruck mannigfach umgeformt werden kann.

Die folgenden Sätze stützen sich auf die Entwickelungen in der III. Abteilung:

Durch Spezialisierung der Grundkurve $a_x^3 \equiv x_1 (x_1 x_2 + \lambda x_3^2) = 0$ (pag. 29) erhält man zwei Sätze für die Hyperbel und Parabel. Es sei das eine Mal $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade, das andere Mal $x_2 = 0$. Dann sagt die Relation pag. 29 das eine Mal aus:

Die Summe der Abstände der Schnittpunkte einer Hyperbel mit einer Kurve m^{ter} Ordnung von der einen Asymptote der Hyperbel ist gleich der Summe der Abstände der Schnittpunkte der zweiten Hyperbelasymptote mit jener Kurve m^{ter} Ordnung von der ersten Asymptote. (Für $m = 1$ führt dieser Satz auf die bekannte Eigenschaft der Hyperbel, daß die Abschnitte auf einer Geraden zwischen der Hyperbel und den Asymptoten gleich sind.)

Für $x_2 = 0$ als unendlich ferne Gerade besagt die Relation pag. 29:

Die Summe der reziproken Werte der Abstände der m Schnittpunkte einer Parabeltangente mit einer Kurve m^{ter} Ordnung von der in der Achsenrichtung durch den Berührungspunkt gehenden Geraden ist gleich der Summe der reziproken Werte der Abstände der $2m$ Schnittpunkte der Parabel mit der Kurve m^{ter} Ordnung von jener Geraden.

Eine interessante Verallgemeinerung des in den Comptes rendus, B. 60, pag. 73 von Laguerre und Chasles aufgestellten zweiten Theoremes erhält man, indem man in $a_x^3 \equiv (x_1 x_2 + \lambda x_3^2)\, x_3 = 0$ $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ als zwei der gemeinsamen Tangenten von dem Fundamentalkegelschnitt der absoluten Maßgeometrie und dem Kegelschnitt:

$x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0$ auffaßt. $x_3 = 0$ ist dann die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ mit dem Kegelschnitt $x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0$. Nach pag. 27 hat man:

$$\left[\log \prod_1^m{}^{\mu} \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}} + \log \prod_1^{2m}{}^{\mu'} \frac{x_3^{(\mu')}}{x_2^{(\mu')}}\right]_{\psi}^{\varphi} = 2h\pi i,$$

$$[x_3 = 0] \qquad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

oder:

$$\left[\frac{1}{2i}\sum_1^m{}^{\mu} \log \frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}}\right]_{\psi}^{\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\sum_1^{2m}{}^{\mu'} \log\left(\frac{x_2^{(\mu')}}{x_3^{(\mu')}}\right)^2\right]_{\psi}^{\varphi} + h\pi.$$

$$[x_3 = 0] \qquad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

In dem Ausdrucke rechts läßt sich nun $x_3^{(\mu')^2}$ ersetzen durch $x_1^{(\mu')} \cdot x_2^{(\mu')}$, (eigentlich durch $\left(-\frac{1}{\lambda} x_1^{(\mu')} \cdot x_2^{(\mu')}\right)$, doch liefert der konstante Faktor $\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$ keinen Beitrag, indem der Logarithmus desselben ebenso oft positiv als negativ auftritt.) Somit:

$$\sum_1^m{}^{\mu} \frac{1}{2i} \log \frac{\left(\frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}}\right)_{\varphi}}{\left(\frac{x_2^{(\mu)}}{x_1^{(\mu)}}\right)_{\psi}} = \frac{1}{2} \sum_1^{2m}{}^{\mu'} \frac{1}{2i} \log \frac{\left(\frac{x_2^{(\mu')}}{x_1^{(\mu')}}\right)_{\varphi}}{\left(\frac{x_2^{(\mu')}}{x_1^{(\mu')}}\right)_{\psi}} + h\pi.$$

$$[x_3 = 0] \qquad [x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0]$$

Da nun $\left(\frac{1}{2i}\log\delta\right)$ oder $\left(-\frac{i}{2}\log\delta\right)$ das Maß des Winkels ist, welchen zwei Gerade bilden, wenn δ das Doppelverhältnis derselben mit den zwei Tangenten an den Fundamentalkegelschnitt vom Scheitel der beiden Geraden aus ist, so kann man folgenden Satz aussprechen:

In der Ebene sei ein beliebiger Kegelschnitt gegeben, ferner ein Punkt der Art, daß die beiden Tangenten von ihm aus an den vorgelegten Kegelschnitt zugleich den festen Maßkegelschnitt berühren, und endlich die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der beiden Tangenten mit dem vorgelegten Kegelschnitte. Den ausgezeichneten Punkt will ich einen „absoluten“ Brennpunkt, jene Gerade die absolute Direktrix nennen. Eine erste Kurve m^{ter} Ordnung φ schneidet der Kegelschnitt in $2m$ Punkten, die Direktrix in m Punkten, welche man mit dem absoluten Brennpunkte durch Vektoren verbinde. Eine zweite Kurve m^{ter} Ordnung ψ schneidet den Kegelschnitt in anderen $2m$ Punkten, die Direktrix in anderen m Punkten, welche man wieder mit dem absoluten Brennpunkte verbinde. Man bilde nun die Summe der Winkel, welche die m Vektoren nach den Durchschnittspunkten von φ und der Direktrix mit den m Vektoren nach den Durchschnittspunkten von ψ und der Direktrix in beliebiger Zuordnung bilden;

ebenso stelle man die Summe der Winkel auf, welche die $2m$ Vektoren nach den Durchschnittspunkten von φ und dem vorgelegten Kegelschnitt mit den $2m$ Vektoren nach den Schnittpunkten von ψ und jenem Kegelschnitt bilden, ebenfalls in beliebiger Zuordnung. Dann ist die erstere Summe gleich der halben zweiten, vermehrt oder vermindert um ein Multiplum von π.

In der Euklidschen Geometrie ist diesem Theorem ganz derselbe Wortlaut zu geben, nur daß „absoluter" Brennpunkt und „absolute" Direktrix durch die einfachen Begriffe Brennpunkt und Direktrix zu ersetzen sind, und daß an Stelle des Maßkegelschnittes die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte treten.

Ist in der Euklidschen Geometrie speziell noch der Kegelschnitt ein Kreis, so ist der Mittelpunkt Brennpunkt und die unendlich ferne Gerade Direktrix. Es treten dann in der ersteren Summe die Winkel der Asymptotenrichtungen von φ mit den Asymptotenrichtungen von ψ auf. Wird überdies noch ψ identisch mit einer m-fach zählenden durch den Kreismittelpunkt gehenden Geraden gewählt, so erhält man die in Comptes Rendus ohne Ableitung angeführte Formel.

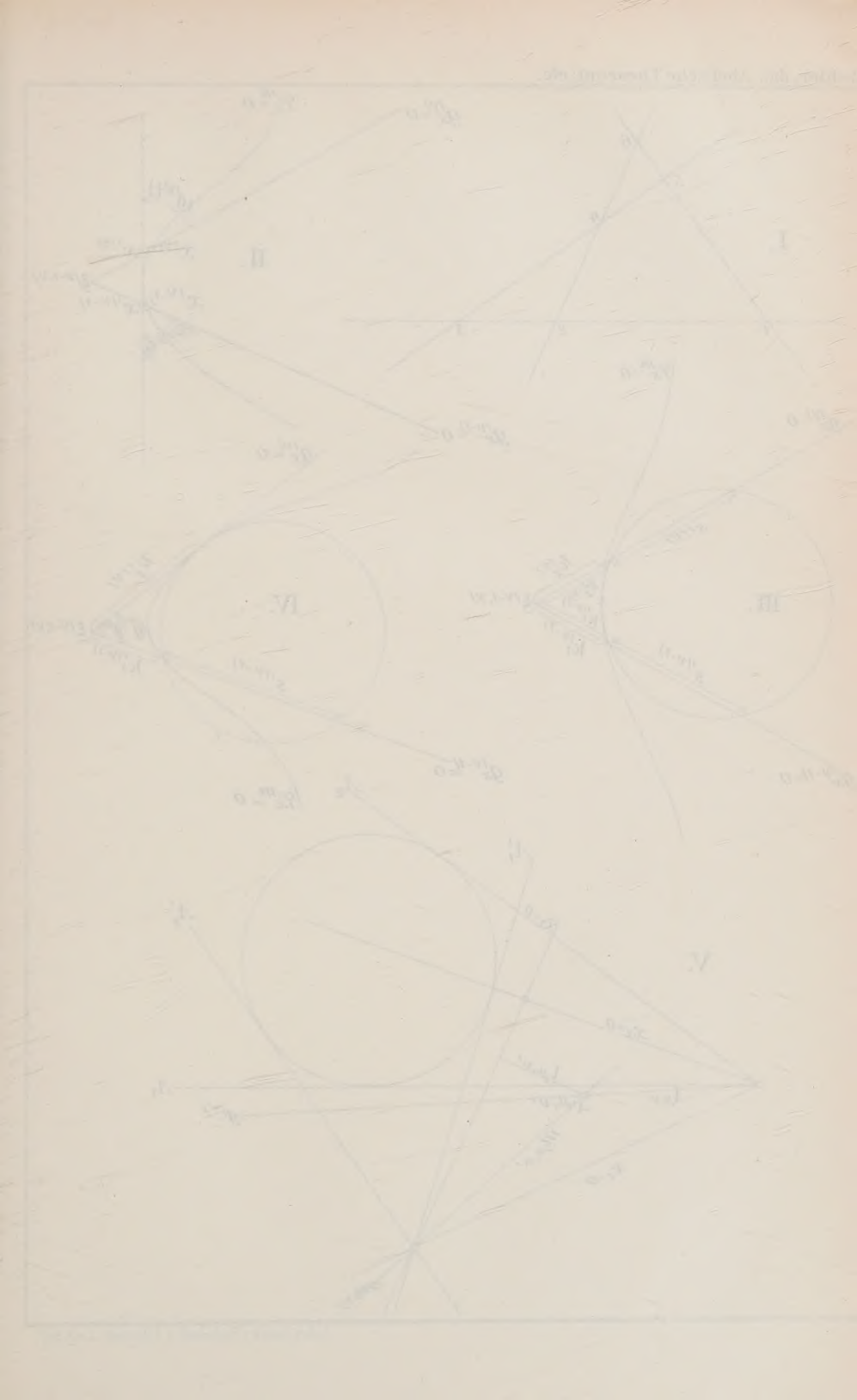
In der von mir gegebenen Form des Satzes für die absolute Maßgeometrie ist er ohne weiteres für dieselbe dual umkehrbar. Für die Euklidsche Geometrie modifiziert sich die Umkehrung und man hat folgenden Satz:

Es sei in der Ebene eine Kurve zweiter Klasse, also auch zweiter Ordnung, mit ihrem Mittelpunkte gegeben. Ferner liege in derselben Ebene noch eine Kurve m^{ter} Klasse φ und eine andere derselben Klasse ψ. Man ziehe von dem Mittelpunkt die m Tangenten sowohl an φ wie ψ, ebenso ziehe man die je $2m$ Tangenten, die dem Kegelschnitt und φ bezw. ψ gemeinsam sind. Dann ist die Summe der Winkel, welche die m vom Mittelpunkte an φ gehenden Tangenten mit den m an ψ gehenden in irgendwelcher Zuordnung bilden, gleich der halben Summe der Winkel, welche die $2m$ dem Kegelschnitte und φ gemeinsamen Tangenten mit den jenem und ψ gemeinsamen bilden, vermehrt oder vermindert um ein Multiplum von π.

Durch die hiemit im zweiten Abschnitte erbrachten Anwendungen der vorher aufgestellten Theoreme glaube ich zur Genüge gezeigt zu haben, welche Mannigfaltigkeit von Aufgaben durch sie ihre Lösung findet. Ich will noch darauf hinweisen, daß analoge Theoreme sich für den Raum wie für die Ebene aufstellen ließen, indem man auf die Entwickelungen von Clebsch, in Crelles Journal für Mathematik B 63, von pag. 218 ab Bezug nimmt unter Berücksichtigung der von Harnack in den Math. Ann. Bd. 9, pag. 382 gegebenen Ausführungen. Schließlich bemerke ich noch, daß die für die absolute Maßgeometrie aufgestellten Formeln auch noch für die Geometrie auf der Kugel gelten.

Curriculum vitae.

Ich, Unterfertigter, wurde geboren am 29. Januar 1878 in Türkheim (in Bayern) als Sohn der Kaufleute B. und W. Zahler. Nach Besuch der Volksschule vom 7. bis 11. Lebensjahre bezog ich das humanistische Gymnasium in Dillingen a/D., welches ich im Jahre 1897 absolvierte. Hierauf widmete ich mich an der Universität München dem Studium der Philosophie, speziell der Mathematik und Physik. In den Jahren 1899 und 1901 unterzog ich mich mit bestem Erfolge den staatlichen Prüfungen für den I. bezw. II. Abschnitt dieser Fächer. Im letzten Jahre widmete ich mich der weiteren Ausbildung auf dem Gebiete der reinen Mathematik.

Rudolf Zahler
gepr. Lehramtskandidat der Mathematik und Physik.

München, am 1. Juni 1902.